

Modelización Espacial de Precipitaciones Extremas en Guanajuato, México



Leonardo Moreno

VI Jornadas de Ingeniería Matemática.

Montevideo - 26 de octubre,
2013

Guanajuato y las inundaciones



Guanajuato
Estado de México

Guanajuato y las inundaciones



Guanajuato Capital

Guanajuato y las inundaciones



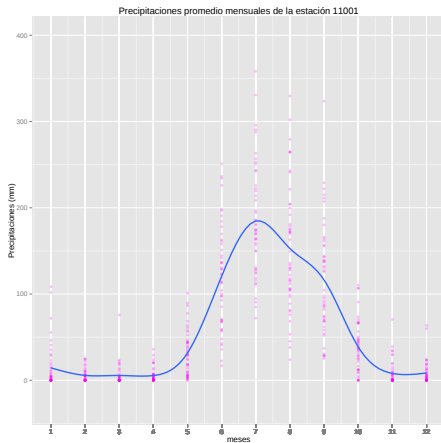
Cimat

Guanajuato y las inundaciones



Relieve de Estado

Guanajuato y las inundaciones



Precipitaciones acumuladas mensuales

Poca información....

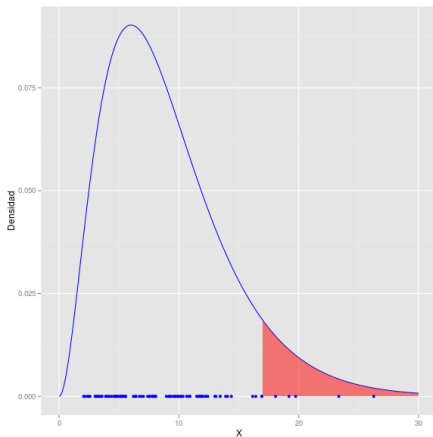
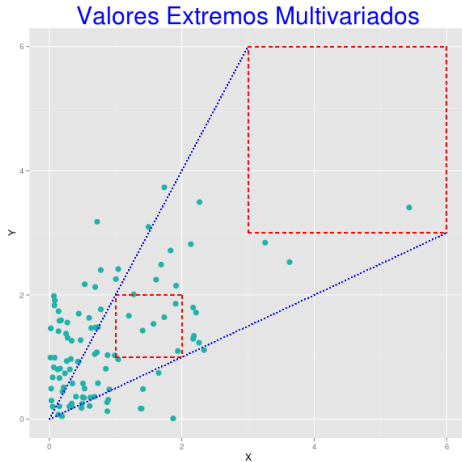
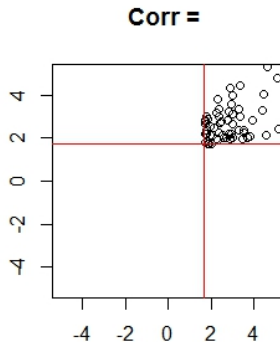
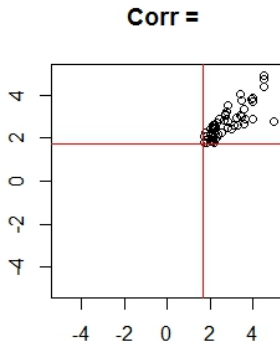


Figura: Estimación de la cola de la distribución

Como inferir probabilidades en zonas con poca información? Extrapolación

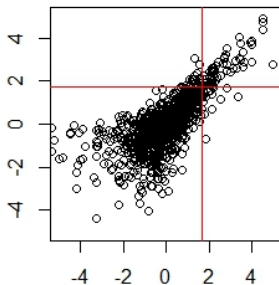


Relaciones de dependencia entre extremos multivariados

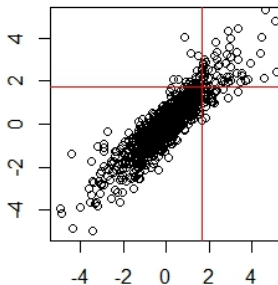


Relaciones de dependencia entre extremos multivariados

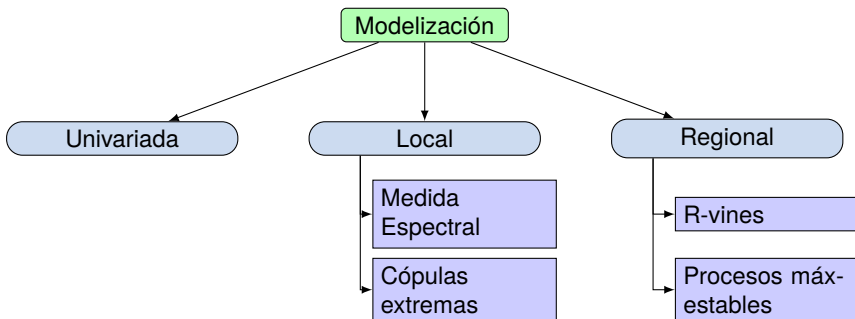
Corr = 0.66



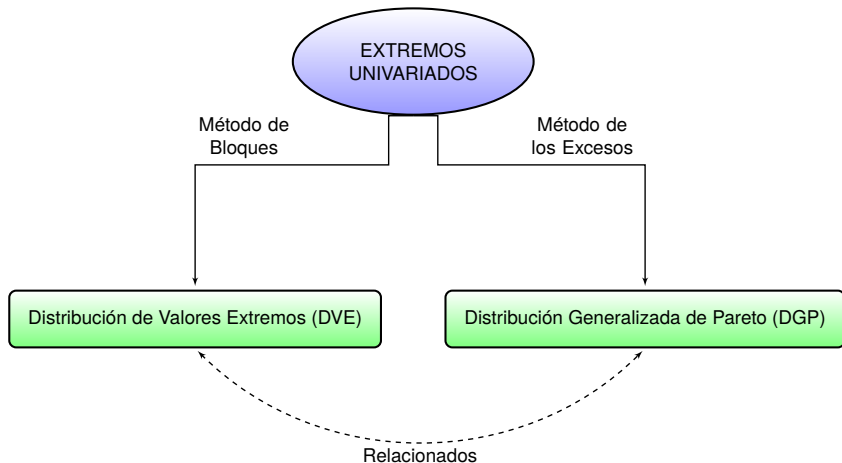
Corr = 0.91



Esquema del trabajo

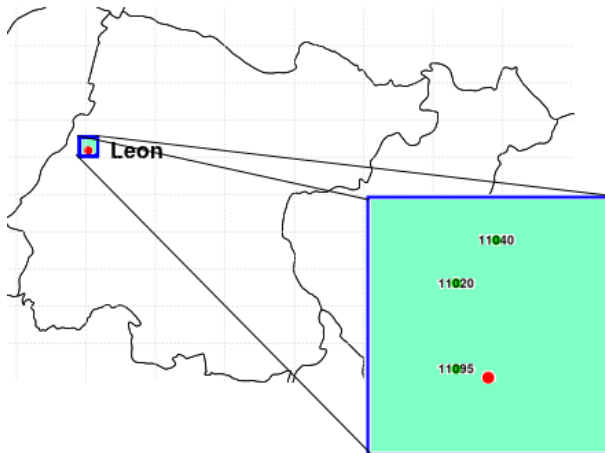


Distribuciones límite en dimensión 1



Un modelo local

Se particiona el conjunto de estaciones (Naveau 2013)



La medida angular

- Si consideramos $R = \|X\|_1$ la componente radial y $W = X/R$ la componente angular. W tiene su recorrido en el simplex S_d .
- Si X es de *variación regular multivariada*, existe una medida de probabilidad H tal que,

$$P(W \in B / R > r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} H(B),$$

donde H es llamada la medida espectral o angular.

- Se puede pensar a H como la distribución límite de W para valores de R suficientemente grandes.
- Si tomamos Fréchet unitarias, H cumple que,

$$\int_{S_p} w_i dH(w) = 1/p \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

Es, decir H es una medida espectral válida si su centro de masa coincide con el centro del simplex.

La medida angular

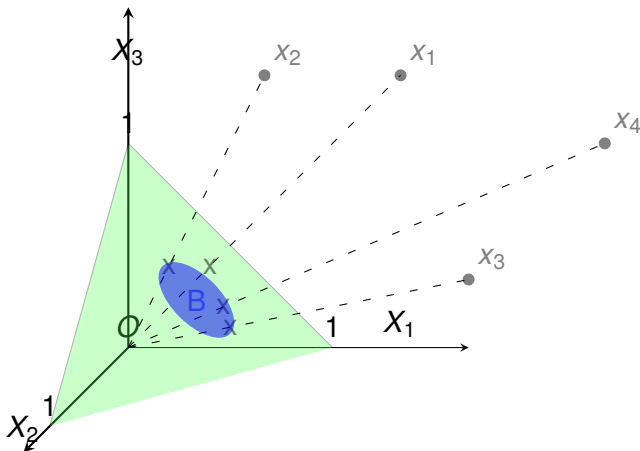


Figura: Representación de la variable W en el simplex unitario de $\mathbb{R}^3$

Cóputas Extremas

(Teorema de Sklar)

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Obs.

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2),$$

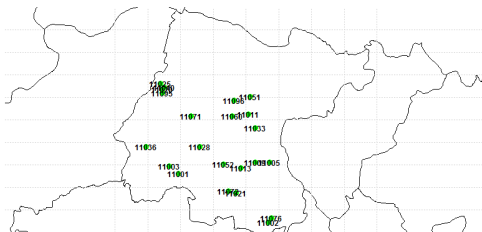
Definición.

Se dice que C_* es un cóputa extrema , si existe otra cóputa C que verifica,

$$C\left(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}, \dots, u_d^{1/n}\right)^n \rightarrow C_*(u_1, u_2, \dots, u_d), \quad (1)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$ y $\forall (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

Modelo Regional



- Se decide trabajar con 22 estaciones que presentan datos simultáneamente en 34 años.

Modelos a través de pares de cópulas bivariadas.

A partir del teorema Sklar,

- En dimensión 2,

$$f_{2/1}(x_2/x_1) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_2(x_2). \quad (2)$$

- En dimensión 3,

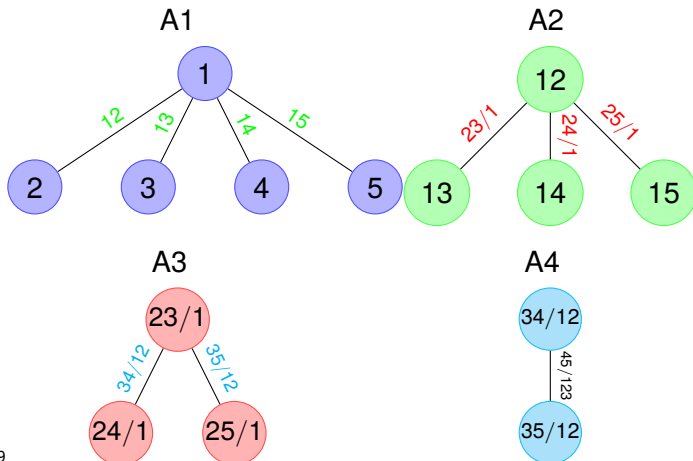
$$\begin{aligned} f_{13/2}(x_1, x_3/x_2) &= c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) f_{1/2}(x_1/x_2) f_{3/2}(x_3/x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{3/12}(x_3/x_1, x_2) &= c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) f_{3/2}(x_3/x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_{3/12}(x_3/x_1, x_2) f_{2/1}(x_2/x_1) f_1(x_1) = \\ &= c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1), \end{aligned}$$

La descomposición no es única. Una forma gráfica de representar estas estructuras y ayudar a su comprensión son las llamadas *regular vines*.

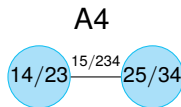
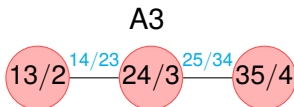
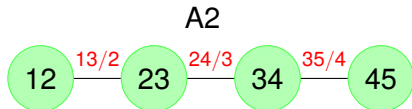
Ejemplos: C-vines

- $f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{13} c_{14} c_{15} c_{23/1} c_{24/1} c_{25/1} c_{34/12} c_{35/12} c_{45/123}$



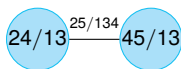
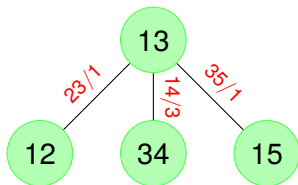
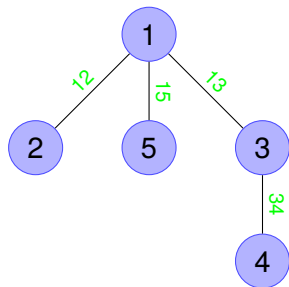
Ejemplos: D-vines

$$f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{23} c_{34} c_{45} c_{13/2} c_{24/3} c_{35/4} c_{14/23} c_{25/34} c_{15/234},$$



Ejemplos: R-vines

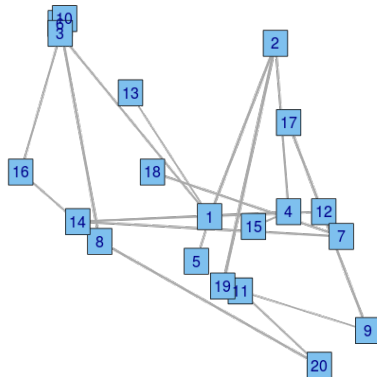
$$f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{13} c_{34} c_{15} c_{23/1} c_{14/3} c_{35/1} c_{24/13} c_{45/13} c_{25/134},$$



El número posible de R-vines en $\mathbb{R}^d$ es $\frac{d!}{2} 2^{\frac{(d-2)(d-3)}{2}}$.

Primer árbol de la estructura Rvine

Tree 1



Extremos en campos aleatorios

Dada la sucesión $X_1, X_2, \dots$ de campos aleatorios se está interesado en caracterizar $\{Y(x)\}_{x \in K}$ límite en distribución del siguiente proceso,

$$\left\{ \max_{i=1, \dots, n} \frac{X_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)} \right\}_{x \in K} \xrightarrow{d} \{Y(x)\}_{x \in K} \quad (3)$$

Donde Y sea un proceso no degenerado, con a_n y b_n funciones continuas en un compacto K de $\mathbb{R}^d$ y a_n una función positiva. L. de Haan en 1984, demuestra que esta clase de procesos límite coincide con una clase de procesos llamada máx-estables.

Procesos máx-estables

Definición

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ y sea $Z \in C(K)$ un proceso estocástico caracterizado por sus distribuciones finito dimensionales. Diremos que $Z = \{Z(t), t \in T\}$ es un proceso máx-estable si dadas n copias independientes de este proceso $Z_1, \dots, Z_n$, existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tal que,

$$Z \stackrel{d}{=} \max_{i=1, \dots, n} \frac{Z_i - b_n}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Algunos Procesos

Modelos

Algunos Procesos

Modelos

Algunos Procesos

Modelos

- Smith (1990).

Algunos Procesos

Modelos

- Smith (1990).
- Schlather (2002).

Algunos Procesos

Modelos

- Smith (1990).
- Schlather (2002).
- Brown-Resnick (2009).

Algunos Procesos

Modelos

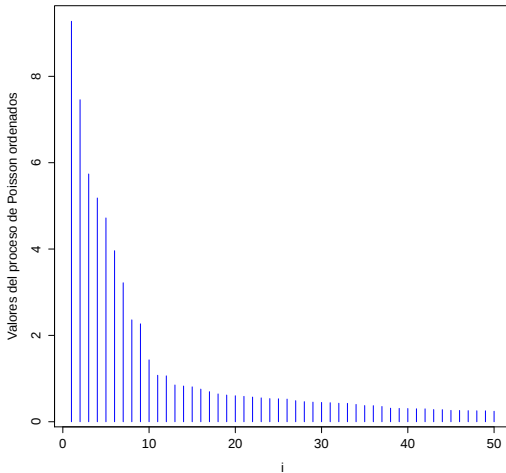
- Smith (1990).
- Schlather (2002).
- Brown-Resnick (2009).
- Geométrico Gaussiano (2012).

Algunos Procesos

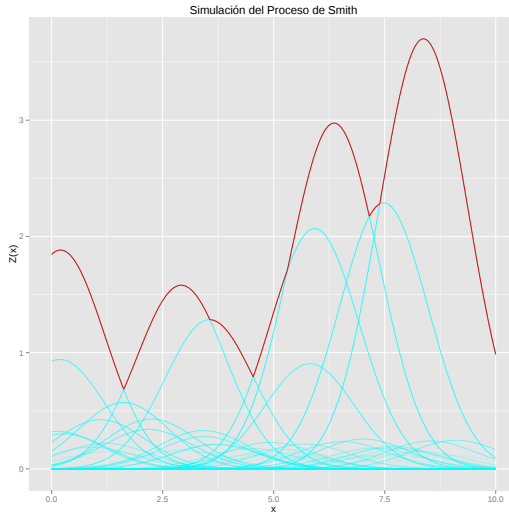
Modelos

- Smith (1990).
- Schlather (2002).
- Brown-Resnick (2009).
- Geométrico Gaussiano (2012).
- t-extremal (2012).

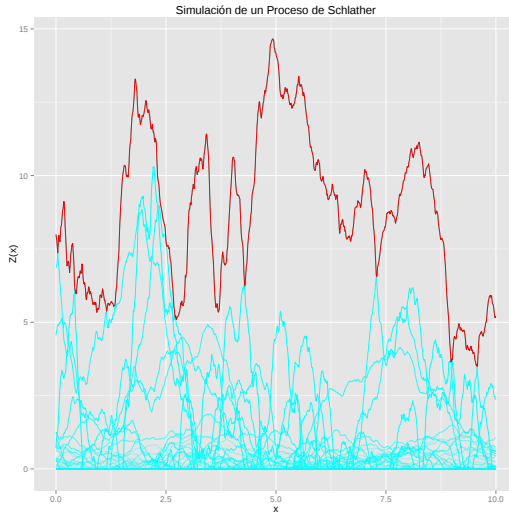
Simulación Poisson



Simulación Smith

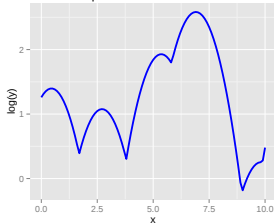


Simulación Schlather

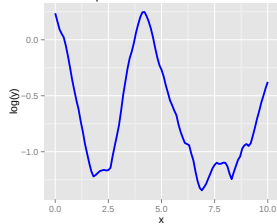


Algunas Simulaciones en dimensión 1.

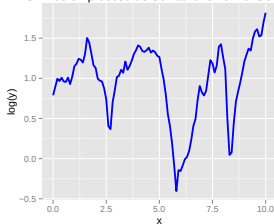
Sim. de un proceso de Smith en dimensión 1



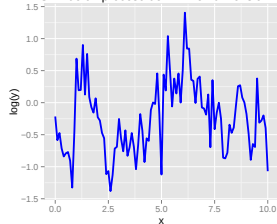
Sim. de un proceso t-extremal en dimensión 1



Sim. de un proceso de Schlather en dimensión 1



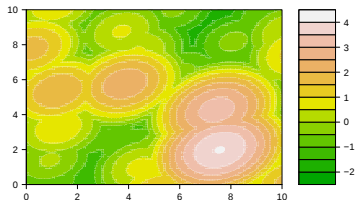
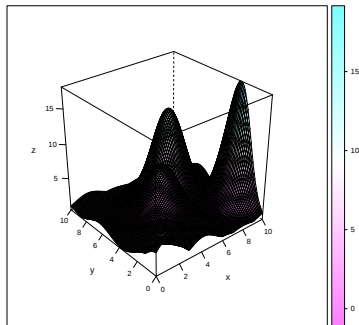
Sim. de un proceso de B-R en dimensión 1



Algunas Simulaciones en dimensión 2.

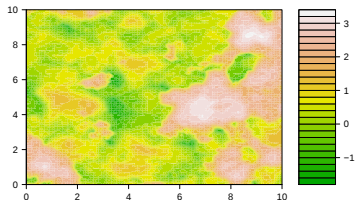
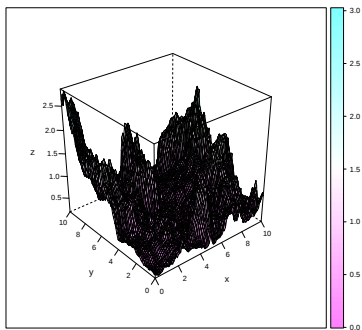
Algunas Simulaciones en dimensión 2.

Algunas Simulaciones en dimensión 2.



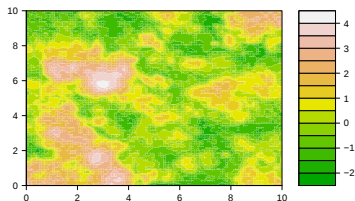
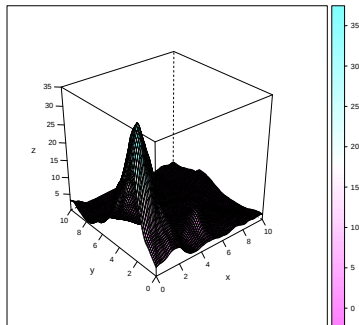
Proceso de Smith.

Algunas Simulaciones en dimensión 2.



Proceso de Schlather.

Algunas Simulaciones en dimensión 2.



Proceso t-extremal.

GRACIAS!!



Caracterización Espectral

Definición: Variación Regular Multivariada

Sea $X = (X_1, \dots, X_d)^t \geq 0$ un v.a con distribución F definido en $\mathcal{C} = [0, \infty] \setminus 0$. El v.a X es de variación regular si y sólo si,

$$\frac{P\left(\frac{X}{t} \in \cdot\right)}{P(\|X\| > t)} \rightarrow \nu(\cdot), \text{ débilmente cuando } t \rightarrow \infty.$$

donde ν es una medida Radon homogénea de orden $-\alpha$.

Si se elige (b_n) tal que $P(\|X\| > b_n) \approx n^{-1}$ entonces la definición es equivalente a

$$nP\left(\frac{X}{b_n} \in \cdot\right) \rightarrow \nu(\cdot), \text{ débilmente cuando } n \rightarrow \infty.$$

ν es llamada la medida límite.

Relación entre ν y H .

$$nP \left(\frac{X}{b_n} \in A \right) \approx \nu(A) = \int_{rw \in A} r^{-(\alpha+1)} dr dH(w)$$

- Sin perder generalidad (razonamiento similar a cópulas) se trabaja con marginales Fréchet.
- Si consideramos Fréchet unitarias se cumple que $\alpha = 1$ y $b_n = n$, entonces

$$P(X \in A^*) \approx \nu(A^*) = \int_{rw \in A^*} r^{-2} h(w) dr dw$$

siendo h la densidad de H .

- En este caso se cumple que

$$\int_{S_p} w_i dH(w) = 1/p \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

Es, decir H es una medida espectral válida si su centro de masa coincide con el centro del simplex.