MODELOS DE SERIES ESTACIONARIAS EN TIEMPO CONTINUO MEDIANTE PROCESOS DE ORNSTEIN - UHLENBECK ITERADOS

Alejandra Cabaña[1] y Enrique M. Cabaña[2]

RESUMEN

En las Primeras Jornadas expusimos resultados sobre pruebas consistentes y focalizadas en alternativas de interés para el usuario, obtenidas por los autores con la participación de varios colaboradores, docentes de la UdelaR y en particular de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración. Se trata de procedimientos transversales a varias aplicaciones estadísticas que han mostrado ser aplicables a pruebas de ajuste simples y compuestas, regresión y ajuste de modelos autorregresivos a series de tiempo estacionarias.
El objeto de esta presentación es proponer una familia de procesos estacionarios de parámetro continuo, los modelos OU(p), utilizables para representar procesos o series estacionarios, y sugerir la posibilidad de utilizar las técnicas basadas en transformaciones de procesos, para ajustar modelos OU(p) a series de tiempo estacionarias, con especial cuidado, por ejemplo, de utilizar el orden p correcto, para lo cual se focaliza el ajuste de un modelo de orden p en la alternativa $p+1$.

Palabras claves: *Procesos de Ornstein - Uhlenbeck, modelos para procesos estacionarios*

1. Introducción

El proceso de Ornstein–Uhlenbeck se caracteriza por ser gaussiano, estacionario y markoviano. Fue propuesto por Leonard S. Ornstein y George E. Uhlenbeck (Uhlenbeck, 1930) como modelo para las velocidades de una partícula sumergida en un fluido, sometida a los choques de las moléculas que la rodean.

Albert Einstein (Einstein, 1905) había propuesto como modelo para el movimiento browniano en un medio de viscosidad infinita, lo que ahora conocemos con el nombre de Proceso de Wiener.

El modelo propuesto por Ornstein y Uhlenbeck mejora el de Einstein porque no requiere que la viscosidad del fluido sea infinita.

Actualmente, tanto los procesos de Wiener como los de Ornstein y Uhlenbeck son muy utilizados para construir modelos de diferentes procesos vinculados a aplicaciones en física, biología, economía, finanzas, e incluso en otras ramas de la matemática.

Llamemos w a un proceso de Wiener típico, es decir, un proceso gaussiano, centrado de incrementos independientes con variancia $\mathbf{E}(w(t)-w(s))^2 = |t-s|$. Suponemos además, como es habitual, $w(0)=0$, pero no limitaremos el dominio del parámetro t a $\mathbf{R}^+$, sino que supondremos w definido en todo $\mathbf{R}$.

El proceso de Ornstein Uhlenbeck x dependiente de los parámetros λ, σ se puede caracterizar entonces mediante

$$x(t) = \sigma \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} dw(s)$$

[1]Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

[2]Área de Matemática, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Uruguay

y, con notación diferencial,

$$dx(t) = -\lambda x\, dt + \sigma dw(t).$$

Podemos pensar que x representa el resultado de acumular los efectos de choques aleatorios independientes, o ruido, con un retorno a la media, que hemos supuesto igual a cero, de tipo exponencial con tasa λ. La magnitud del ruido (o volatilidad en la jerga económico-financiera) está dada por σ.

Cuando x se observa en instantes equiespaciados $\{i\tau : i = 0, 1, 2, \dots, n\}$, la serie $X_i = x(i\tau)$ satisface un modelo autorregresivo de orden 1, ya que

$$X_{i+1} = \sigma \int_{-\infty}^{(i+1)\tau} \mathrm{e}^{-\lambda((i+1)\tau - s)} dw(s) = \sigma \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \int_{-\infty}^{i\tau} \mathrm{e}^{-\lambda(i\tau - s)} dw(s) + \sigma \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} \mathrm{e}^{-\lambda((i+1)\tau - s)} dw(s)$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda\tau} X_i + Z_i,$$

donde $Z_i = \sigma \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} \mathrm{e}^{-\lambda((i+1)\tau - s)} dw(s)$ es una innovación (independiente de $(w(t) : t \leq i\tau)$ y de $(x(t) : t \leq i\tau)$) de esperanza cero y variancia $\sigma^2 \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} \mathrm{e}^{-2\lambda((i+1)\tau - s)} ds = \sigma^2 \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{2\lambda s} ds = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda\tau})$.

Por ese motivo, es posible considerar al proceso de OU como una interpolación para tiempo continuo de un modelo autorregresivo de orden 1. Tanto los modelos autorregresivos como los procesos de OU se suelen utilizar para representar procesos aleatorios estacionarios.

En esta presentación vamos a introducir procesos que llamaremos *de Ornstein - Uhlenbeck de orden p* (abreviadamente OU(p)), y proponemos su utilización como modelos para procesos estacionarios de tiempo continuo, y también para series de tiempo estacionarias obtenidas por la observación de procesos de tiempo continuo en instantes equiespaciados.

Así como se utilizan modificaciones de los procesos autorregresivos que permiten representar series heteroscedásticas, pensamos que tiene interés desarrollar el mismo tipo de modificaciones a los procesos OU(p), con el mismo propósito de representar procesos de volatilidad variable.

De igual manera que las transformaciones de procesos presentadas por los mismos autores en las Jornadas Académicas de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración de 2010 han permitido construir pruebas de ajuste consistentes y focalizadas en las alternativas de interés para modelos autorregresivos, es de esperar que el mismo tipo de transformaciones sean aplicables a los procesos OU(p) con la misma finalidad.

Se trata de desarrollos abiertos que pueden interesar a los participantes en las Jornadas, y es por eso que describimos los procesos OU(p) en las secciones que siguen. Sobre algunos de estos problemas, los autores tenemos en marcha un trabajo conjunto con A. Arratia del cual esta presentación puede considerarse un adelanto.

2. Modelos autorregresivos y procesos de OU de orden mayor que 1

Es bien conocido que el modelo autorregresivo de orden p

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{i-j} + \sigma Z_i$$

puede expresarse, mediante la utilización del operador B que lleva cada elemento X_i de una serie de tiempo en $BX_i = X_{i-1}$, en la forma

$$\prod_{j=1}^{p} (1 + \lambda_i B) X_i = \sigma Z_i$$

donde los parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ están vinculados con los coeficientes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ por la identidad de polinomios

$$\prod_{j=1}^{p}(1+\lambda_j z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j z^j.$$

De manera análoga introducimos el Proceso de OU de orden p:

La analogía se establece a partir de que el proceso de Ornstein Uhlenbeck x de parámetro $\lambda > 0$ se obtiene de un proceso de Wiener w en $\mathbf{R}$ mediante la integral de Wiener

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} dw(s).$$

Denotamos $\mathcal{OU}_\lambda$ (*operador de OU de parámetro* $\lambda > 0$) a la aplicación que lleva y en la integral $\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} dy(s)$, cuyo dominio son las funciones o procesos y para los cuales la integral está bien definida. La aplicaremos a un proceso de Wiener w, o a procesos diferenciables obtenidos a partir de w. La misma definición se extiende al caso en que el parámetro λ se reemplaza por $\kappa = \lambda + \imath\mu$, $\lambda \in \mathbf{R}^+, \mu \in \mathbf{R}$. Al elegir λ positivo aseguramos que la integral sea convergente, y que procesos y estacionarios den lugar a imágenes también estacionarias.

Al conjunto de los complejos con parte real positiva, lo denotamos C^+.

Llamamos *Proceso de Ornstein Uhlenbeck de orden p y parámetros* $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_p) \in (\mathbf{C}^+)^p$, $\sigma > 0$ (abreviado OU(p)) al resultado de iterar Transformaciones de OU de parámetros $\kappa_1, \dots, \kappa_p$ a partir de un proceso de Wiener w:

$$x = \prod_{j=1}^{p} \mathcal{OU}_{\kappa_j} \sigma w. \tag{1}$$

Así como la familia de los modelos autorregresivos de orden 1 coincide con la de las observaciones equiespaciadas de modelos OU(1), cabe preguntarse si ocurre algo similar para modelos de orden mayor.

La respuesta es negativa. Los modelos de series estacionarias obtenidos por la observación en instantes equiespaciados de procesos OU(p) no son en general modelos AR(p), como vemos en la sección 4, y por lo tanto la familia de los modelos OU(p), además de permitir representar procesos estacionarios de tiempo continuo, nos da un modo alternativo de representar series estacionarias.

En lo que sigue nos referiremos a procesos de parámetro complejo. Las fórmulas no se simplifican por considerar parámetros reales, y las familias de covariancias representables mediante los procesos de parámetro complejo son significativamente más ricas que las que resultan de imponer que los parámetros sean reales. Sin embargo, las aplicaciones requieren normalmente que los procesos mismos sean reales. Eso se consigue imponiendo que cada parámetro imaginario aparezca apareado con su conjugado.

3. Representación de los procesos OU(p) como combinación lineal de procesos OU(1)

Con el propósito de ordenar la exposición de algunas propiedades elementales de los operadores de OU, y de esa manera simplificarla, las enunciaremos en forma de teoremas.

Teorema 1 *Si* $\kappa_1 \neq \kappa_2$*, el producto* $\mathcal{OU}_{\kappa_2}\mathcal{OU}_{\kappa_1}$ *coincide con la suma* $\frac{\kappa_1}{\kappa_1-\kappa_2}\mathcal{OU}_{\kappa_1} + \frac{\kappa_2}{\kappa_2-\kappa_1}\mathcal{OU}_{\kappa_2}$*, y es, como consecuencia, conmutativo.*

Demostración. Calculamos $\mathcal{OU}_{\kappa_1}y(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\kappa_1(t-s)}dy(s) = \mathrm{e}^{-\kappa_1 t}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\kappa_1 s}dy(s)$, $d\mathcal{OU}_{\kappa_1}y(t) = -\kappa_1\mathrm{e}^{-\kappa_1 t}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\kappa_1 s}dy(s)dt + dy(t)$ y entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{OU}_{\kappa_2}\mathcal{OU}_{\kappa_1}y(t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\kappa_2(t-s)}\left(-\kappa_1\mathrm{e}^{-\kappa_1 s}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\kappa_1 r}dy(r)ds + dy(s)\right)\\
&= \mathcal{OU}_{\kappa_2}y(t) - \kappa_1\mathrm{e}^{-\kappa_2 t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\kappa_1 r}\left(\int_{r}^{t}\mathrm{e}^{(\kappa_2-\kappa_1)s}ds\right)dy(r)\\
&= \mathcal{OU}_{\kappa_2}y(t) - \kappa_1\mathrm{e}^{-\kappa_2 t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\kappa_1 r}\left(\frac{\mathrm{e}^{(\kappa_2-\kappa_1)t}-\mathrm{e}^{(\kappa_2-\kappa_1)r}}{\kappa_2-\kappa_1}\right)dy(r)\\
&= \mathcal{OU}_{\kappa_2}y(t) - \frac{\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{-\infty}^{t}\left(\mathrm{e}^{-\kappa_1(t-r)}-\mathrm{e}^{-\kappa_2(t-r)}\right)dy(r)\\
&= \mathcal{OU}_{\kappa_2}y(t) - \frac{\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}\left(\mathcal{OU}_{\kappa_1}y(t)-\mathcal{OU}_{\kappa_2}y(t)\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2 *El operador $\mathcal{OU}_\kappa$ tiene derivada l-ésima respecto de κ igual al operador $\mathcal{OU}_\kappa^{(l)}$ que lleva y en*

$$\mathcal{OU}_\kappa^{(l)}y(t) = (-1)^l\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)}(t-s)^l dy(s).$$

Demostración. Lo verificamos por inducción completa:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\mathcal{OU}_{\kappa+\delta}^{(l-1)}-\mathcal{OU}_{\kappa}^{(l-1)}\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}(-1)^{l-1}\int_{-\infty}^{t}\left(\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)}(1-\delta(t-s)+o(\delta))(t-s)^{l-1}-\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)}(t-s)^{l-1}\right)dy(s)\\
&= (-1)^{l-1}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)}(-(t-s))(t-s)^{l-1}dy(s)
\end{aligned}$$

□

Corolario 1 *El cuadrado del operador $\mathcal{OU}_\kappa$ es $\mathcal{OU}_k + k\mathcal{OU}_\kappa^{(1)}$.*

Demostración. El resultado se obtiene pasando al límite cuando δ tiende a cero en la expresión de $\mathcal{OU}_{\kappa+\delta}\mathcal{OU}_\kappa$ obtenida en el Teorema 1. □

En lo que sigue supondremos que los valores de los parámetros κ de los operadores OU son todos diferentes. Los resultados cuando hay multiplicidad pueden obtenerse de manera análoga. El efecto de la singularidad debida a la coincidencia de valores de los parámetros tiene consecuencias para las aplicaciones que deben ser analizadas cuidadosamente.

Teorema 3 *El operador $\prod_{j=1}^{p}\mathcal{OU}_{\kappa_j}$ construido con valores de $\kappa_1,\ldots,\kappa_p$ todos diferentes es igual a la combinación lineal*

$$\sum_{j=1}^{p}K_j\mathcal{OU}_{\kappa_j},\ donde\ K_j = \frac{\kappa_j^{p-1}}{\prod_{k\neq j}(\kappa_j-\kappa_l)}.$$

Demostración. El resultado para $p = 2$ es el Teorema 1.

Supongamos que la fórmula vale para $p - 1$, de modo que, con $K_j^* = \frac{\kappa_j^{p-2}}{\prod_{l<p,l\neq j}(\kappa_j-\kappa_l)}$,

$$\prod_{j=1}^{p} \mathcal{OU}_{\kappa_j} = \mathcal{OU}_{\kappa_p}\left(\sum_{j=1}^{p-1} K_j^* \mathcal{OU}_{\kappa_j}\right) = \sum_{j=1}^{p-1} K_j^* \left(\frac{\kappa_p}{\kappa_p - \kappa_j}\mathcal{OU}_{\kappa_p} + \frac{\kappa_j}{\kappa_j - \kappa_p}\mathcal{OU}_{\kappa_j}\right).$$

El coeficiente del término en $\mathcal{OU}_{\kappa_j}$ es $K_j^* \frac{\kappa_j}{\kappa_j-\kappa_p} = K_j$. Para obtener el resultado enunciado sólo basta establecer que

$$\sum_{j=1}^{p-1} K_j^* \frac{\kappa_p}{\kappa_p - \kappa_j} = K_p$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\kappa_j^{p-2}}{\prod_{l<p,l\neq j}(\kappa_j - \kappa_l)} \frac{\kappa_p}{\kappa_p - \kappa_j} = \frac{\kappa_p^{p-1}}{\prod_{l<p}(\kappa_p - \kappa_l)}.$$

Luego de multiplicar por el denominador del segundo miembro y dividir por κ_p queda por verificar la identidad

$$\sum_{j=1}^{p-1} \kappa_j^{p-2} \prod_{l<p,l\neq j} \frac{\kappa_p - \kappa_l}{\kappa_j - \kappa_l} = \kappa_p^{p-2}.$$

Ambos miembros son polinomios de grado $p - 2$ en κ_p, y coinciden en los $p - 1$ valores κ_j, y esto prueba que son idénticos. □

Corolario 2 *El proceso $x = \prod_{j=1}^{p} \mathcal{OU}_{\kappa_j}\sigma w$ es la combinación lineal de los procesos de Ornstein - Uhlenbeck $\xi_j = \mathcal{OU}_{\kappa_j}\sigma w$ con coeficientes K_j.*

El Corolario 2 nos indica que el proceso de OU x de orden p obtenido aplicando el operador $\prod_{j=1}^{p} \mathcal{OU}_{\kappa_j}$ a un proceso de Wiener σw combina linealmente los procesos de OU ordinarios ξ_j en cada uno de los cuales los efectos aleatorios dw son acumulados, pero decaen con diferentes tasas κ_j. Cualitativamente podemos pensar que se agregan procesos de OU con memorias de diferente duración.

Notemos, sin embargo, que el proceso x es una combinación lineal muy particular de p procesos de OU ordinarios, que depende sólo de p parámetros que son las p tasas de decaimiento. La representación de efectos con memorias de distinta duración mediante la combinación lineal de p procesos de OU con coeficientes cualesquiera tiene interés, sin duda, pero es un proceso más complicado, dependiente de $2p$ parámetros, las p tasas κ_j y los p coeficientes.

La forma particular del proceso OU(p) simplifica su tratamiento estadístico, como sugerimos en la Sección 6.

4. Las funciones de covariancia de los procesos de OU(p)

La covariancia entre $\xi_j = \mathcal{OU}_{\kappa_j}\sigma w$ y $\xi_k = \mathcal{OU}_{\kappa_k}\sigma w$ es

$$\gamma_{j,k}(t) = \mathbf{E}\xi_j(t)\bar{\xi}_k(0) = \sigma^2 \mathbf{E} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\kappa_j(t-s)} dw(s) \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\bar{\kappa}_k s} dw(s)$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\kappa_j(t-s)}\mathrm{e}^{\bar{\kappa}_k s} ds = \frac{\sigma^2 \mathrm{e}^{-\kappa_j t}}{\kappa_j + \bar{\kappa}_k}$$

y, como consecuencia de la expresión de $x = \prod_{j=1}^{p} \mathcal{OU}_{\kappa_j}\sigma w$ dada por el Corolario 2, la función de autocovariancias de x es

$$\gamma(t) = \mathbf{E}x(t)\bar{x}(0) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} K_j \bar{K}_k \mathrm{e}^{-\kappa_j t} \frac{1}{\kappa_j + \bar{\kappa}_k}$$

Este resultado nos permite escribir la función de autocorrelaciones de la serie de tiempo obtenida por evaluación de x en los múltiplos de un tiempo dado τ. Si $X_i = x(i\tau)$, entonces $\rho_i = \mathbf{E}X_i X_0 / \mathbf{Var}X_0 = \gamma(i\tau)/\gamma(0)$.

Vamos a aprovechar esta expresión para mostrar que la familia de las series obtenidas de procesos de OU(2) no coincide con la de los procesos AR(2), lo que muestra que los modelos basados en la iteración de procesos de Ornstein - Uhlenbeck son esencialmente diferentes de los autorregresivos, aunque coincidan para el orden uno.

Teorema 4 *Supongamos que x es un proceso real OU(2) y X es una serie de tiempo AR(2), con iguales autocorrelaciones de orden 1 y 2. Entonces las autocorrelaciones de orden 3 son en general diferentes.*

Demostración En el caso del modelo AR(2), si r_1, r_2, r_3 son las correlaciones de órdenes 1, 2 y 3, entonces son bien conocidas las relaciones

$$-1 \le r_1 \le 1, \quad 1 - 2(1 - r_1^2) \le r_2 \le 1, \quad r_3 = \frac{r_1}{1 - r_1^2}(2r_2 - r_1^2 - r_2^2). \tag{2}$$

Para el proceso OU(2) de parámetros reales $\lambda_1 < \lambda_2$,

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K_j K_k \mathrm{e}^{-\lambda_j t} \frac{1}{\lambda_j + \lambda_k}$$

$$= K_1^2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \frac{1}{2\lambda_1} + K_2^2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \frac{1}{2\lambda_2} + K_1 K_2 (\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}) \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_1}$$
$$= \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t})}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$
$$= \frac{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - 2\lambda_1\lambda_2(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t})}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$
$$= \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2(-\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)},$$

de donde resultan

$$\gamma(0) = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

y las correlaciones

$$\rho_h = \frac{\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 h\tau} - \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 h\tau}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad h = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

El cambio de λ_h por λ_h/τ muestra que se obtienen las mismas correlaciones para cualquier valor de τ, por lo que fijamos $\tau = 1$ sin pérdida de generalidad.

Cuando, en particular, $\rho_1 = r_1$ y $\rho_2 = r_2$, calculamos ρ_3 y r_3 como funciones de λ_1 y λ_2 utilizando (2) y (3). La Figura 1 muestra la comparación entre ambos resultados. Los valores de λ_1 y λ_2 varían entre 0 y 5.

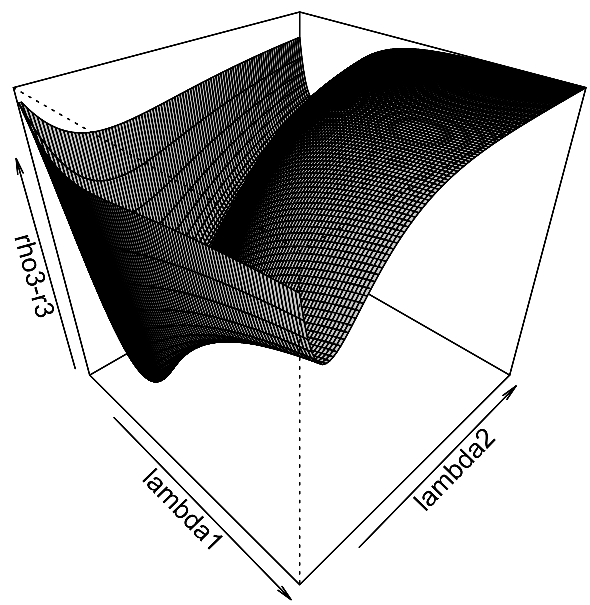

Figura 1. Diferencia entre las autocorrelaciones r_3, ρ_3 de procesos AR(2) y OU(2) con $r_1 = \rho_1, r_2 = \rho_2$.

5. Inversión del operador OU(p)

Observemos que si $\xi(t) = \mathcal{OU}\sigma w(t)$, entonces $d\xi(t) = -\kappa\xi(t)dt + \sigma dw(t)$ y, como consecuencia, $\sigma w(t) = \xi(t) - \xi(0) + \kappa \int_0^t \xi(s)ds$. Por lo tanto, si $\mathcal{I}^0$ lleva $y(t)$ en $y(t) - y(0) = \int_0^t dy(s)$ y $\mathcal{I}^1$ lleva $y(t)$ en $\int_0^t y(s)ds$, entonces $\mathcal{I}^0 + \kappa\mathcal{I}^1$ es el operador inverso de $\mathcal{OU}_\kappa$.

De esto resulta que, con la notación $\mathcal{I}^h$ para la h-ésima potencia de $\mathcal{I}^1$, el operador inverso de $\prod_{j=1}^p \mathcal{OU}_{\kappa_j}$ es

$$\prod_{j=1}^p (\mathcal{I}^0 + \kappa_j\mathcal{I}^1) = \mathcal{I}^0 - \sum_{j=1}^p \phi_j\mathcal{I}^j.$$

Los coeficientes ϕ_j están vinculados a los decaimientos κ_j por la identidad de polinomios

$$\prod_{j=1}^p (1 + \kappa_j z) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j z^j.$$

Se cumple entonces la fórmula de inversión

$$\sigma w(t) = \mathcal{I}^0 x(t) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \mathcal{I}^j x(t).$$

6. Estimación de los parámetros por máxima verosimilitud

Cuando los procesos $\mathcal{I}^h x$, $h = 0, 1, \ldots, p$ se observan en $\{i\tau : i = 0, 1, \ldots, n\}$, entonces el vector

$$\Delta w = (w(\tau) - w(0), \ldots, w(i\tau) - w((i-1)\tau), \ldots, w(n\tau) - w((n-1)\tau))^{\mathrm{tr}}$$

que tiene componentes normales $(0, \tau)$ independientes se obtiene a partir de la matriz ΔX de $n \times p$ cuya h-ésima columna es

$$(\mathcal{I}^h x(\tau) - \mathcal{I}^h x(0), \ldots, \mathcal{I}^h x(i\tau) - \mathcal{I}^h x((i-1)\tau), \ldots, \mathcal{I}^h x(n\tau) - \mathcal{I}^h x((n-1)\tau))^{\mathrm{tr}}$$

y del vector

$$\Delta x = (x(\tau) - x(0), \ldots, x(i\tau) - x((i-1)\tau), \ldots, x(n\tau) - x((n-1)\tau))^{\mathrm{tr}}$$

mediante

$$\sigma \Delta w = \Delta x - \Delta X \boldsymbol{\phi},$$

con $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)^{\mathrm{tr}}$.

El método de máxima verosimilitud aplicado a la estimación de $\boldsymbol{\phi}$ conduce entonces al estimador $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ que minimiza el cuadrado de la norma euclidiana de $\sigma\Delta w$, a saber,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\Delta X^{\mathrm{tr}} \Delta X)^{-1} \Delta X^{\mathrm{tr}} \Delta x.$$

7. Conclusión

La familia de procesos OU(p) proporciona modelos para procesos estacionarios en tiempo continuo y para series estacionarias. Los procesos de orden p dependen de p parámetros que se pueden estimar de manera similar a los coeficientes de un modelo de regresión, además del parámetro de escala. Desde ese punto de vista, los procesos OU(p) tienen un comportamiento similar a los modelos AR(p), pero constituyen una alternativa diferente para la inferencia sobre series estacionarias. Además son aplicables a modelar procesos de parámetro continuo.

Consideramos que el estudio de sus propiedades, el diseño de pruebas de ajuste, y la obtención de generalizaciones que permitan el ajuste de modelos heteroscedásticos son problemas que interesa analizar y resolver.

Bibliografía

G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein (1930),"On the Theory of the Brownian Motion", *Phys. Rev.* **36**, 823–841.

Einstein, A. (1905) "On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat." *Ann. Phys.* **17**, 549-560.