APLICACIÓN DE LEYES ANALÍTICAS DE MORTALIDAD EN CIERTOS SEGUROS DE VIDA

Sergio Barszcz[1] ; Elena Vernazza[1]

RESUMEN

El trabajo presenta y analiza resultados obtenidos de la aplicación de leyes analíticas de mortalidad a conceptos asociados a ciertos seguros de vida.
Para ello, se comienza exponiendo distintos conceptos asociados a los seguros de vida y a las leyes analíticas de mortalidad. Respecto a los seguros de vida, se definen las variables aleatorias relevantes para el análisis y sus correspondientes distribuciones, así como otros conceptos que se utilizan en el desarrollo posterior. En cuanto a cada una de las leyes analíticas, se especifica la fuerza de la mortalidad, la función de supervivencia y sus distintos parámetros con sus correspondientes restricciones.
Luego, se presentan los resultados, en función de los distintos parámetros, que se obtienen al aplicar cada una de las leyes analíticas de mortalidad a los distintos conceptos asociados a los seguros de vida.
A continuación, se analizan los resultados anteriores para distintos valores de los parámetros de cada una de las leyes analíticas consideradas.
Finalmente, se realiza una síntesis conceptual de las principales conclusiones obtenidas.

Palabras clave: *Actuarial, Seguros de vida, Leyes analíticas de mortalidad.*

Introducción

Los sistemas de seguros, según Bowers (Bowers et al, 1997)**,** se han desarrollado para reducir el impacto financiero adverso de algunos tipos de eventos aleatorios. La existencia de estos sistemas está condicionada por las características comparadas de las funciones de utilidad de los asegurados respecto a las de las compañías aseguradoras.
En nuestro desarrollo posterior, trabajaremos en primer lugar con modelos de seguros de vida diseñados para reducir el impacto financiero del evento aleatorio fallecimiento (en fecha desconocida). En los seguros sobre la vida que analizaremos aquí, el tamaño y el momento del pago de la indemnización dependerán únicamente del momento del fallecimiento del asegurado. Los seguros de vida a tener en cuenta, serán aquellos cuya indemnización es pagadera al momento del fallecimiento del asegurado (pmf o seguros continuos) a diferencia de aquellos cuya indemnización es pagadera en el aniversario del contrato inmediato posterior al fallecimiento (pacipf o seguros discretos). Analizaremos además un seguro en el que el pago de la indemnización está condicionado a la supervivencia del asegurado a cierto momento en el tiempo (seguro dotal puro).
Otro elemento muy importante vinculado a los seguros de vida, son las rentas de vida, cuya relevancia se fundamenta por el tipo de operaciones en las cuales participan y en particular, en función de que los seguros son adquiridos, habitualmente, a través de ellas. Una renta de vida, según Bowers (Bowers et al, 1997)**,** es una sucesión de pagos realizada en forma continua o a intervalos equidistantes (tales como meses, semestres, años) mientras que una determinada persona sobrevive. Puede ser temporaria, esto es, limitada a un cierto número de

[1]*Instituto de Estadística.*

años (siempre sujeta a la condición de que el asegurado esté vivo) o puede ser vitalicia, esto es, pagadera por toda la vida. Por otra parte, cabe resaltar que, en este documento serán tratadas únicamente aquellas rentas discretas en las que los pagos se realizan en forma adelantada.
Todo lo establecido, tanto para seguros como para rentas, está referido a vidas humanas aunque las conclusiones se extienden en lo pertinente a otras situaciones asimilables.
Resulta imprescindible culminar esta introducción, señalando que para trabajar con los seguros sobre la vida y las rentas de vida necesitamos conocer el comportamiento de la mortalidad: las leyes analíticas de mortalidad brindan un punto de partida para modelar dicha variable en función de la edad.

Las variables aleatorias X, T, K

Dentro del análisis de seguros de vida y rentas de vida, los conceptos "edad de muerte" y "tiempo de sobrevida", son fundamentales.
Por este motivo, es que se definen, en términos actuariales, las siguientes variables aleatorias (v.a.), las cuales serán claves en el desarrollo del presente trabajo.

A partir de la notación generalmente utilizada, se definen:
1) X = "Edad de muerte de un recién nacido" - v.a. absolutamente continua
Su correspondiente función de distribución es:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

siendo su función de supervivencia

$$s(x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x) = P(X > x) = {}_x p_0$$

La función de supervivencia a la edad x establece la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x.

Con estos elementos queda definido otro concepto fundamental: la fuerza de la mortalidad:

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{(F_X(x))'}{s(x)} = \frac{(1 - s(x))'}{s(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

La fuerza de la mortalidad, establece, para cada valor de x, el valor de la densidad condicional de X a la edad exacta x, dada la supervivencia a esa edad.

2) T(x) = "Tiempo de sobrevida de una persona de edad x" – v.a. absolutamente continua
Su correspondiente función de distribución es:

$$G_{T(x)}(t) = P(T(x) \leq t) = {}_t q_x$$

la cual permite calcular cual es la probabilidad de que un individuo de edad x, fallezca entre la edad x y x+t.

Su función de densidad se define:

$$g_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

donde:

μ_{x+t} puede interpretarse como una densidad condicionada y ${}_t p_x . \mu_{x+t} .dt$ es la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad x+t y muera entre x + t y x + t + dt

3) K(x) = "Años de sobrevida completados por una persona de edad x antes de su fallecimiento" – v.a. discreta que equivale a la parte entera de T(x)

Su correspondiente función de distribución es:

$$P(K(x) \leq k) = {}_{k+1}q_x$$

la cual establece la probabilidad de que una persona de edad x, fallezca antes de la edad x+k+1 (lo que es equivalente a que llegue a completar como máximo k años enteros de sobrevida a partir de la edad x). Su función de cuantía queda definida como:

$$P(K(x) = k) = {}_k p_x \cdot {}_1 q_{x+k} = {}_{k/1}q_x$$

la cual puede interpretarse como la probabilidad de que una persona de edad x, fallezca con edad x+k, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que una persona de edad x, sobreviva a la edad x+k pero fallezca antes de la edad x+k+1.

Presentación general de distintos tipos de seguros de vida

En esta sección serán presentados los aspectos fundamentales que caracterizan a cada uno de los seguros, sobre los cuales, más adelante, se aplicarán las leyes analíticas de mortalidad. Para ello desarrollaremos un modelo que explicaremos a continuación.
Tal como establece Bowers (Bowers et al,1997), al desarrollar el modelo de cualquier seguro de vida, utilizaremos una función de beneficio b_t (indemnización) y una función de actualización v_t (factor de actualización del momento de cobro al momento de emisión de la póliza).Definiremos t como la longitud del período desde la emisión de la póliza hasta el fallecimiento.

Para la función de actualización asumiremos que la tasa de interés efectiva anual es, no solo determinística, sino constante (5%). Incorporar la tasa de interés como v.a. requiere un desarrollo mucho más profundo que el que nos planteamos realizar en este trabajo.

Así, el primer paso para el análisis de un seguro sobre la vida será definir b_T y v_T, con lo que definiremos al valor presente Z_T, como $Z_T = b_T.v_T$. Z_T es una v.a. a la cual denotaremos Z. Cabe aclarar que para un valor de t para el cual $b_T = 0$,el valor de v_T es irrelevante dado que lo que nos interesa es Z_T. Ello nos permitirá definir v_T de manera conveniente en ciertas circunstancias.

A continuación determinaremos algunas características de la distribución de probabilidad de Z que son consecuencia de supuestos sobre la distribución de T (sin todavía ingresar al terreno de las leyes analíticas de mortalidad). Para un seguro de vida, el valor esperado de la v.a. valor presente Z es llamado premio puro único (en adelante, ppu), valor presente actuarial (en adelante, vpa) ó esperanza del valor presente de los pagos de indemnización.

- **<u>Seguro de Muerte temporario n años</u>**

Un seguro de muerte temporario n años provee un pago solo si el asegurado fallece dentro del término de n años a partir del momento de emisión de la póliza.

Si se paga $1 pmf, según Gerber (Gerber, 1995)

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases} \quad ; \quad v_t = v^t \quad t \geq 0 \quad ; \quad Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

La función de distribución de Z, quedará definida entonces de la siguiente manera según González Manjarrez (González Manjarrez, 2008)

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(v^T \leq z) = P(T\log(v) \geq \log(z)) = 1 - P(T \leq \frac{\log(z)}{\log(v)}) = 1 - F_T\left(\frac{\log z}{\log v}\right)$$

Entonces:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq v^n \\ 1 - F_T\left(\frac{\log(z)}{\log(v)}\right) & v^n < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

El ppu para un seguro de muerte por n años con un pago de $1 al momento del fallecimiento de una persona de edad x es, según el principio del valor esperado, E(Z) y puede ser calculado de la siguiente manera, a través de la función de densidad de la v.a. T:

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \int_0^\infty z g_T(t)\, dt = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

$$E(Z) = \int_0^\infty z g_T(t) dt = \int_0^n v^t \bullet {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt = \overline{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

- **<u>Seguro de Muerte vida entera</u>**

Un seguro de muerte vida entera provee un pago luego del fallecimiento del asegurado, produzcase cuando se produzca. Si el pago es de $1, entonces:

$$b_t = 1 \quad t \geq 0 \quad ; \quad v_t = v^t \quad t \geq 0 \quad ; \quad Z = v^T \quad T \geq 0$$

La función de distribución de Z quedará definida entonces de la siguiente manera, según ya vimos:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(v^T \leq z) = P(T\log(v) \geq \log(z)) = 1 - P(T \leq \frac{\log(z)}{\log(v)}) = 1 - F_T\left(\frac{\log z}{\log v}\right)$$

Entonces:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - F_T\left(\dfrac{\log(z)}{\log(v)}\right) & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

El ppu para este tipo de seguros, en función de la v.a. T, es:

$$\overline{A}_x = E(Z) = \int_0^{\infty} v^t \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt$$

- **<u>Seguro Dotal Puro n años</u>**

Un seguro dotal puro n años provee un pago al final de los n años si y solo si el asegurado sobrevive al menos n años desde la emisión de la póliza. Si el monto a pagar es $1, entonces:

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \leq n \\ 1 & t > n \end{cases} \quad ; \quad v_t = v^n \quad t \geq 0 \quad ; \quad Z = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

El único elemento de incertidumbre en el seguro dotal puro es si el reclamo va a ocurrir o no. El tamaño y el momento del pago, si el reclamo ocurre, están predeterminados.
En la expresión $Z = v^n Y$, Y es una v.a. indicadora del evento de que una persona de edad x sobreviva a la edad x+n.

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{el individuo de edad x está con vida a la edad x + n} \\ 0 & \text{el individuo de edad x no está con vida a la edad x + n} \end{cases} \quad \text{con: } \begin{cases} P(Y = 1) = {}_n p_x \\ P(Y = 0) = {}_n q_x \end{cases}$$

Quedando definida la cuantía de Z como:

$$P(Z = z) = \begin{cases} {}_n q_x & \text{si } z=0 \\ {}_n p_x & \text{si } z=v^n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Y su función de distribución queda dada por:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ {}_n q_x & 0 \leq z < v^n \\ 1 & z \geq v^n \end{cases}$$

El ppu es: $E(Z) = E(v^n Y) = v^n E(Y) = v^n \, {}_n p_x = A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$

- **<u>Seguro Dotal Mixto</u>**

Un seguro dotal mixto por n años provee un monto a pagar inmediatamente luego de la muerte del asegurado o al sobrevivir n años desde el momento de emisión de la póliza, según lo que ocurra primero. Si el seguro es por $1 y el beneficio de fallecimiento es pagadero al momento de la muerte, entonces:

$$b_t = 1 \quad ; \quad v_t = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n \end{cases} \quad ; \quad Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

El seguro puede ser visto como la combinación de un seguro de muerte temporario por n años y un dotal puro por n años (cada uno de ellos por $1). Sean Z1, Z2 y Z3 las v.a. que denotan el valor presente del seguro de muerte temporario con el beneficio de fallecimiento pagadero al momento de la muerte, del seguro dotal puro y del seguro dotal mixto respectivamente,

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases} \quad ; \quad Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases} \quad ; \quad Z_3 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

entonces: $Z_3 = Z_1 + Z_2$ y por lo tanto $\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1}$

Presentación general de distintos tipos de rentas

Hay distintas operaciones de la vida diaria que constituyen rentas de vida. En particular, la mayoría de los seguros individuales se adquieren a través de una renta de vida adelantada. Tal como ya se dijo, nos concentraremos en el análisis de rentas de vida discretas adelantadas..

Para llevar a cabo el desarrollo de las rentas de vida, comenzaremos considerando un pago de $1 dentro de n años sujeto a la condición de que una persona de edad x sobreviva ese período. Vimos antes que un seguro de ese tipo recibía el nombre de seguro dotal puro. En el ámbito de los seguros, utilizamos el término ppu para la esperanza del valor presente del pago de la indemnización. En relación a las rentas el término valor presente actuarial (vpa) y la notación ${}_nE_x$ serán las utilizadas.
La palabra actuarial en la expresión "valor presente actuarial" implica que una esperanza, u otro factor además del interés, ha sido incorporado al cálculo. De esta forma el valor presente actuarial de $1 dentro de n años sujeto a la condición de que una persona de edad x viva n años más es: ${}_nE_x = v^n \, {}_np_x$.

Para trabajar con las rentas de vida, pueden ser utilizadas dos técnicas: la técnica de la corriente de pagos y la técnica del valor agrupado. Los pasos a llevar a cabo, para aplicar estas técnicas se presentan a continuación.

Técnica de corriente de pagos.
Dicha técnica consiste en:
1. Determinar el importe del pago en el momento t.
2. Determinar el valor presente actuarial del pago del momento t
3. Sumar (integrar) estos valores presentes actuariales para todos los pagos que se realizan.

A pesar de que en nuestro desarrollo posterior utilizaremos únicamente esta técnica, se considera de utilidad explicar la otra técnica (técnica del valor agrupado) y aplicarla para mostrar el tratamiento de las rentas continuas.

Técnica del valor agrupado.
Consiste en:

1. Calcular el valor presente, considerando únicamente el interés compuesto, de todos los pagos que se realizarán si la muerte ocurre en el momento t.
2. Multiplicar el valor presente, hallado en el paso 1, por la probabilidad o la función de densidad del fallecimiento a la edad x+t
3. Sumar (integrar) para todos los valores de t.

Como aplicación de esta última técnica, a modo de ejemplo, se debe tener en cuenta que: siendo T el tiempo de sobrevida de una persona de edad x, el valor presente de los pagos de una renta de vida vitalicia continua de \$ 1 por año es una variable aleatoria: Y = V(0,T,δ).

La función de distribución de Y según Bowers (Bowers, 1997) es:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(V(0,T,\delta) \leq y) = P(1 - v^T \leq \delta\, y) = P(-v^T \leq \delta\, y - 1)$$
$$= P(v^T \geq -(\delta\, y - 1)) = P(T \leq \frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}) = F_T(\frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}) \text{ para } 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

y la función de densidad de Y (según el mismo autor) es:

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F_T(\frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}) = \frac{f_T((-\log(1-\delta\, y))/\delta)}{1-\delta\, y}) \text{ para } 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

Ahora, siguiendo la técnica del valor agrupado, el valor presente actuarial de la renta es: E(Y)=E(V(0,T,δ)).

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty V(0,T,\delta)\,._t p_x . \mu_{x+t} dt$$

Alternativamente, bajo la técnica de la corriente de pagos se puede calcular el vpa de la renta haciendo:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_x$$

Aplicando integración por partes. se puede demostrar que las dos expresiones resultan equivalentes.

Como ya fue explicitado, en el presente trabajo, calcularemos el valor presente actuarial de las rentas a través de la técnica de corriente de pagos.

- **<u>Renta de Vida temporaria n años, un pago por año, adelantada</u>**

Sea $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ el valor presente actuarial de una renta temporaria n años adelantada de \$1 pagadero al comienzo de cada año mientras que una persona de edad x esté con vida, entonces, a partir de la técnica de la corriente de pagos se tiene:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_k p_x$$

- **Renta de Vida Vitalicia, un pago por año, adelantada**

Sea $\ddot{a}_x$ el valor presente actuarial de una renta de vida vitalicia adelantada de $1 pagadero al comienzo de cada año mientras que una persona de edad x esté con vida, entonces, por la técnica de la corriente de pagos se tiene:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$$

- **Renta de Vida temporaria n años, r pagos por año, adelantada**

En la práctica, las rentas de vida son habitualmente pagaderas sobre bases mensuales, trimestrales o cuatrimestrales.

Sea $\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|}$ el valor presente actuarial de una renta de vida temporaria, con r pagos por año adelantados de $1/r (el primer pago se da al momento de comprometerse a pagar la renta) mientras que una persona de edad x esté con vida, durante el plazo de n años.

Entonces, por la técnica de la corriente de pagos y aplicando la fórmula de Woolhouse se tiene:

$$\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{r+1}{2r}(1 - v^n \, {}_n p_x)$$

Si cada uno de los r pagos fuera de $ 1, entonces tendríamos que el correspondiente vpa sería:

$$r.\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = r.\left(a_{x:\overline{n}|} + \frac{r+1}{2r}(1 - v^n \, {}_n p_x) \right)$$

- **Renta de Vida vitalicia, r pagos por año, adelantada**

Sea $\ddot{a}^{(r)}_x$ el valor presente actuarial de una renta de vida vitalicia, con r pagos por año adelantados de $1/r (el primer pago se da al momento de comprometerse a pagar la renta) mientras que una persona de edad x esté con vida.

Entonces, por la técnica de la corriente de pagos y aplicando la fórmula de Woolhouse se tiene:

$$\ddot{a}^{(r)}_x = a_x + \frac{(r+1)}{2r}$$

Si cada uno de los r pagos fuera de $ 1, entonces tendríamos que el correspondiente vpa sería:

$$r.\ddot{a}^{(r)}_x = r.\left(a_x + \frac{r+1}{2r} \right)$$

Presentación general de tres leyes analíticas de mortalidad

Las leyes analíticas de mortalidad pretenden brindar un punto de partida para el modelado de la mortalidad en función de la edad. Es en busca de este objetivo que cada una de ellas propone una expresión distinta para las funciones biométricas, en particular, la función de supervivencia s(x), la función que determina la fuerza de la mortalidad μ_x, entre otras.

La principal razón por la cual se sugiere el uso de determinadas leyes analíticas es por un tema práctico, ya que a partir de ellas resulta más sencillo expresar una tabla de mortalidad: Efectivamente, con las leyes analíticas se deben definir unos pocos parámetros, fácilmente estimables, en lugar de valores asociados a cada edad de la tabla.

En el presente trabajo, se trabajará con las leyes analíticas de mortalidad propuestas por De Moivre (1729), Gompertz (1825) y Makeham (1860).

Las leyes analíticas de mortalidad y sus correspondientes parámetros y restricciones se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1 – Leyes analíticas de mortalidad

Ley	μ_x	$s(x)$	Restricciones
De Moivre (1729)	$(w-x)^{-1}$	$1-(x/w)$	$0 \leq x < w$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp(-m(c^x-1))$	$B > 0$; $c > 1$; $x \geq 0$
Makeham (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x-1)]$	$B > 0$; $c > 1$; $x \geq 0$; $A \geq -B$

Observaciones

- $m = B/\log(c)$
- Gompertz es un caso especial de Makeham, en el cual $A = 0$.

- **<u>Ley de De Moivre</u>**

En términos teóricos resulta evidente que la fuerza de la mortalidad debe aumentar con la edad (excluyendo las edades iniciales). Esto puede verse claramente en lo propuesto por De Moivre, observando la expresión de μ_x.

Siendo w la edad máxima de la tabla de mortalidad, μ_x tiende a infinito cuando la edad tiende a la edad máxima. Por otra parte, analizando la expresión de s(x), se observa que esta ley parte de la siguiente hipótesis: número de fallecimientos constante por año independiente de la edad y por ende de los sobrevivientes.

- **<u>Ley de Gompertz</u>**

Por su parte Gompertz, propone incorporar la fuerza de la mortalidad, a través de una función definida como: Bc^x (creciente exponencialmente) asumiendo, en este caso, que cada individuo presenta una resistencia a enfermedades (y a fallecer por causas naturales) decreciente en función de la edad.

- **<u>Ley de Makeham</u>**

Makeham, establece, además, la necesidad de incorporar los riesgos por fallecimientos "accidentales" (independientes de la edad), lo cual queda capturado en A, es decir que Makeham considera que la muerte de un individuo puede estar determinada tanto por el azar como por una resistencia (cada vez más débil, en función del aumento de la edad) a la muerte. Según Merino (Merino et al, 2002) *"Esta ley presenta buenos ajustes en edades intermedias (adultas), mientras que proporciona problemas en las edades extremas de la tabla principalmente en las edades más jóvenes puesto que en las edades infantiles la mortalidad es decreciente. Es considerada la ley más conocida y ampliamente utilizada para ajustar diversas tablas de supervivencia."*

Aplicación de las leyes analíticas

Lo primero que haremos en esta sección será determinar como queda expresada la función de distribución de T (tiempo de sobrevida) y la función de distribución y de densidad de Z (valor presente del pago de indemnización en el caso de los seguros de vida) para el seguro de muerte temporario n años, bajo las leyes analíticas de mortalidad (la extensión a los otros seguros de muerte se basa en el mismo razonamiento y en el caso del seguro dotal puro y mixto es necesario hacer alguna operación adicional). Por otra parte, las funciones de distribución y densidad de Y (valor presente de las rentas de vida) no se desarrollan en este trabajo, por razones de extensión.

<u>1.De Moivre</u>

Función de distribución de la variable aleatoria T

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \overset{\overset{DeMoivre}{\uparrow}}{=} 1 - \left(\frac{1 - \frac{(x+t)}{w}}{1 - \frac{x}{w}} \right) = 1 - \left(\frac{w-x-t}{w-x} \right) = \left(\frac{w-x-w+x+t}{w-x} \right) = \frac{t}{w-x}$$

Recordando la relación ya establecida entre la función de distribución de T y de Z para el seguro de muerte temporario n años, obtenemos la función de distribución y la densidad de Z para este seguro

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq v^n \\ 1 - \dfrac{\log(z)}{\log(v)(w-x)} & v^n < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

y la función de densidad de Z:

$$f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = -\frac{1}{z\log(v)(w-x)} \quad \text{para } v^n < z < 1$$

<u>2.Gompertz</u>

Función de distribución de la variable aleatoria T

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \overset{\substack{Gompertz \\ \uparrow}}{=} 1 - \left(\frac{\exp[-m(c^{t+x}-1)]}{\exp[-m(c^{x}-1)]} \right) = 1 - \exp[-mc^{x}(c^{t}-1)]$$

A partir de la cual se determina la función de distribución de Z:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq v^n \\ \exp[-mc^{x}(c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}}-1) & v^n < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

y la función de densidad de Z:

$$f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = -\frac{m\log(c)c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}+x} e^{-m(c^{x})\left(c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}}-1\right)}}{z\log(v)} \quad \text{para } v^n < z < 1$$

3. Makeham

La función de distribución de la variable aleatoria T queda determinada por:

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \overset{\substack{Makeham \\ \uparrow}}{=} 1 - \left(\frac{\exp[-A(x+t)-m(c^{t+x}-1)]}{\exp[-Ax-m(c^{x}-1)]} \right) = 1 - \exp[-At-mc^{x}(c^{t}-1)]$$

Y a partir de esta, queda definida la función de distribución de Z:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq v^n \\ \exp[-A\frac{\log(z)}{\log(v)} - mc^{x}(c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}}-1) & v^n < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

La cual deriva en la siguiente función de densidad de Z:

$$f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = -\frac{(A + m\log(c)c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}+x}) e^{-m(c^{x})\left(c^{\frac{\log(z)}{\log(v)}}-1\right)} z^{-\frac{A+\log(v)}{\log(v)}}}{\log(v)} \quad \text{Para } v^n < z < 1$$

Resultados para los distintos seguros

Utilizando estas funciones se hallan los premios puros únicos definidos en secciones previas. A menos mención expresa en contrario, w = 110, x (edad de la persona) = 40, n (plazo de las operaciones temporarias) es igual a 10 y la tasa efectiva anual es 0,05.

Para la aplicación práctica de la fórmula de De Moivre se utilizará como valor de referencia de la edad máxima la ya mencionada en el párrafo anterior.

Para la aplicación práctica de las fórmulas de Gompertz y Makeham se partirá de los valores de los parámetros utilizados para la elaboración de una tabla de mortalidad ilustrativa, según Bowers (Bowers et al, 1997). Dichos parámetros son: B = 0.00005, c =1.096478 y A = 0.0007

- **<u>Seguro de vida temporario n años</u>**

Los resultados obtenidos para el ppu de este tipo de seguro, se presentan a continuación.

Al variar la edad

Bajo la aplicación de la ley de De Moivre al cálculo del ppu, se obtienen los resultados presentados en la tabla siguiente (Tabla 2)

Tabla 2 – Seguro temporario n años – Según edad - De Moivre

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.08792456	0.1130459	0.1582642	0.2637737

A partir de la Tabla 2, podemos apreciar que el ppu para este seguro, aumenta, al aumentar la edad. Sin embargo el crecimiento entre los valores esperados no resulta lo suficientemente pronunciado como sería razonable esperar para vidas humanas, debido a las hipótesis de las cuales parte la ley de De Moivre.

Los resultados que surgen de realizar el mismo cálculo, pero bajo la aplicación de la ley analítica de mortalidad de Gompertz, se pueden ver en la Tabla 3.

Tabla 3 – Seguro temporario n años – Según edad - Gompertz

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.003938919	0.02454149	0.1432148	0.5837219

Estos resultados, muestran que al aumentar la edad, aumenta el ppu, tal como ocurría bajo De Moivre. El crecimiento y el nivel para las distintas edades de los valores esperados resulta razonable si se consideran vidas humanas.

Un comportamiento similar se aprecia en los resultados obtenidos de la aplicación de la ley analítica de Makeham (Tabla 4).

Tabla 4 – Seguro temporario n años – Según edad - Makeham

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.009434692	0.02990293	0.1478053	0.5855225

Vale la pena analizar la diferencia entre los resultados que se obtienen con la fórmula de Makeham respecto de los que se obtienen con Gompertz. Efectivamente, los resultados obtenidos con Makeham son mayores en todos los casos a los obtenidos con Gompertz : esto se deriva por un lado del hecho de que estamos considerando un seguro cuya indemnización se paga en caso de fallecimiento y por el otro del valor positivo que estamos utilizando para el parámetro A en la fórmula de Makeham

Al variar los parámetros B y A

La figura 1, refleja que es lo que ocurre con el ppu de un seguro temporario n años, bajo la aplicación de la ley de Gompertz y Makeham, al variar B. Conjuntamente se presenta el comportamiento de la ley de Makeham, al modificar el valor de A.

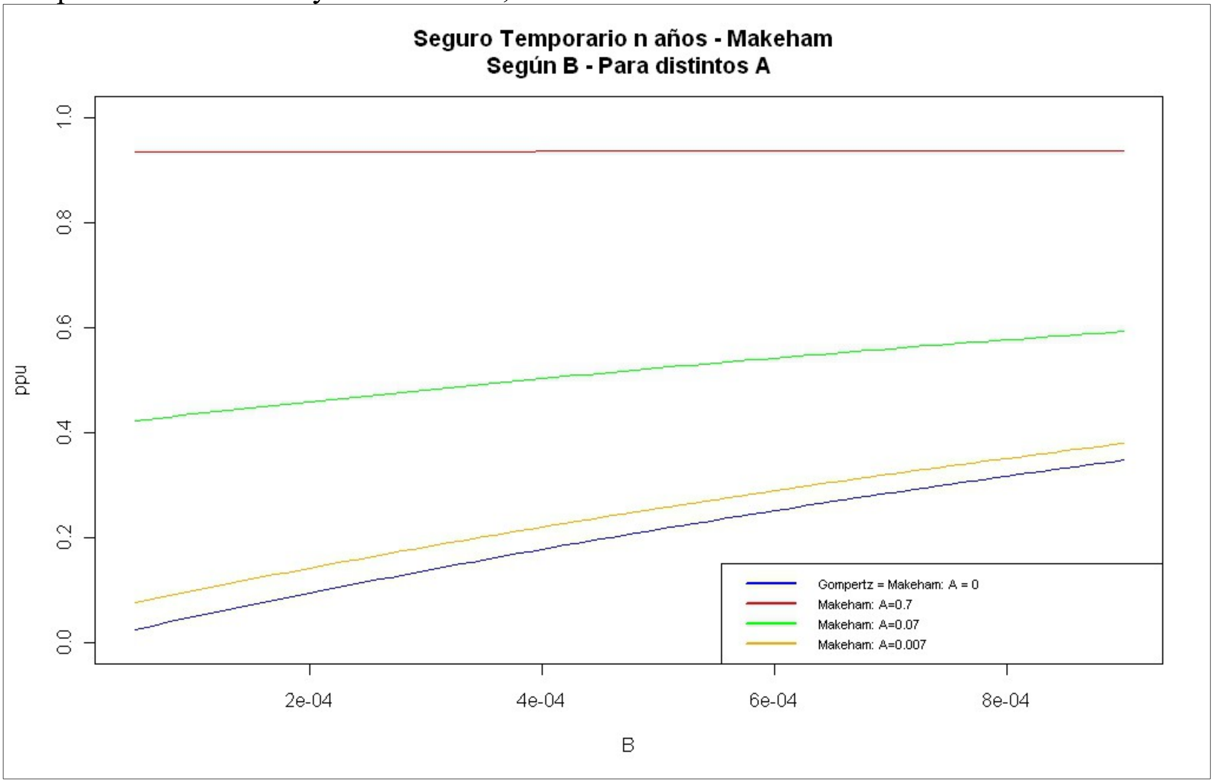

Figura 1 – Seguro temporario n años - ppu bajo Makeham - Según B - Para distintos A.

Dado que se trata de un seguro cuya indemnización se paga en caso de fallecimiento y teniendo en cuenta el signo de los parámetros A y B, resulta lógico el resultado que se observa en el gráfico que muestra que a valores crecientes de dichos parámetros se obtienen ppu crecientes. Se puede observar también que ciertos valores de los parámetros no son compatibles con la consideración de la ley analítica para vidas humanas.

Por otra parte, B es un factor de escala que impacta sobre el crecimiento (supuesto exponencial creciente) del riesgo de muerte dependiente de la edad, mientras que A constituye un factor que recoge el riesgo de muerte accidental (no dependiente de la edad).

Al variar los parámetro c y A

En la figura 2, observamos el comportamiento del ppu de un seguro temporario en función de c, y para distintos valores de A.

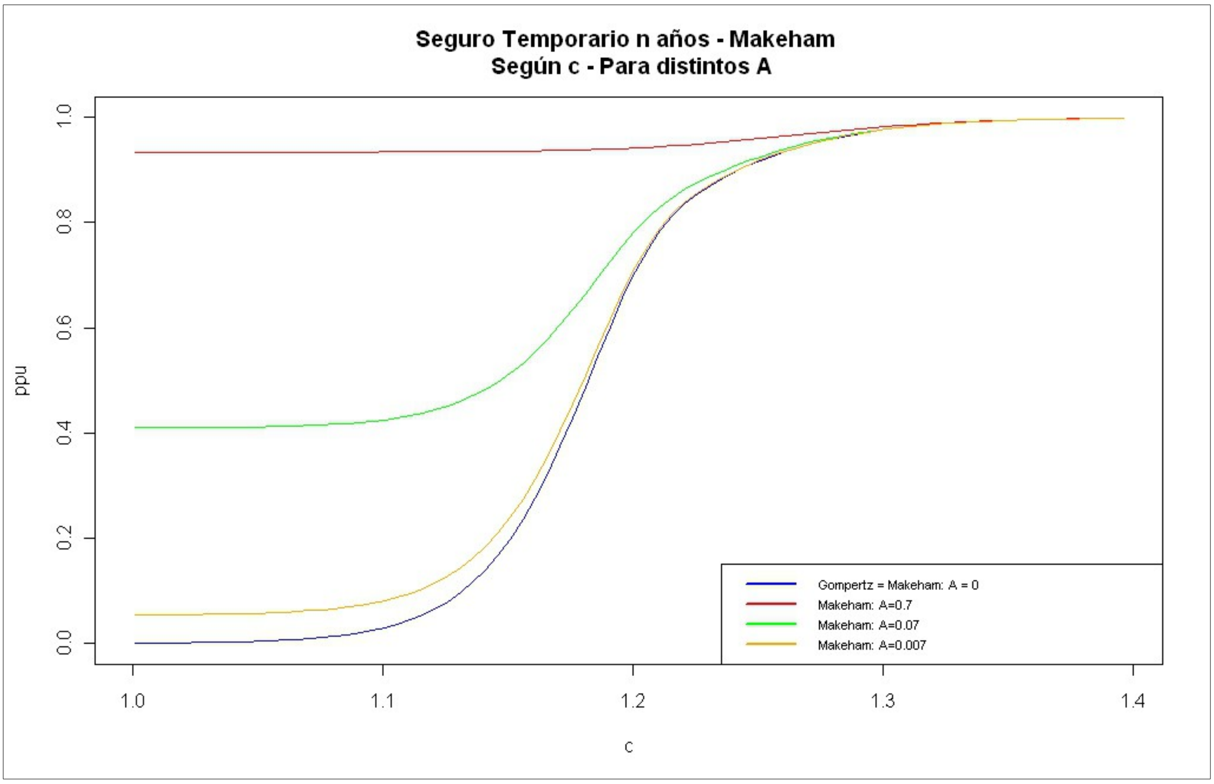

Figura 2 – Seguro temporario n años - ppu bajo Makeham - Según c - Para distintos A.

Teniendo en cuenta el signo de A y los valores de c, resulta lógico el resultado que se observa en el gráfico que muestra que a valores crecientes de dichos parámetros se obtienen ppu crecientes. Se puede observar también que ciertos valores de los parámetros no son compatibles con la consideración de la ley analítica para vidas humanas.

Al variar n

Las siguientes tablas (Tablas 5-7) nos presentan que ocurre al variar n.

Tabla 5 – Seguro temporario n años – Según n - De Moivre

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.1130459	0.2250521	0.2512084	0.2672661

Tabla 6 – Seguro temporario n años – Según n - Gompertz

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.02454149	0.1084799	0.1612897	0.1971293

Tabla 7 – Seguro temporario n años – Según n - Makeham

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.02990293	0.1174697	0.1697554	0.2047129

Podemos apreciar, a partir de estas tablas, que el ppu, bajo la aplicación de las distintas leyes, muestra en todos los casos crecimiento al aumentar n (como resulta lógico dado que n representa el período de cobertura), aunque la tasa a la que se produce dicho crecimiento es sensiblemente mayor en el caso de Gompertz y Makeham. Los resultados obtenidos para De Moivre confirman que la ley no resulta razonable para vidas humanas.

- **<u>Seguro de Vida vitalicio</u>**

Los resultados obtenidos para el ppu de este tipo de seguro, se presentan a continuación.

Al variar la edad

Las tablas 8 a 10, establecen que es lo que ocurre con el ppu, al variar la edad, considerando las tres leyes analíticas de mortalidad tratadas en este trabajo.

Tabla 8 – Seguro vida entera - Según Edad - De Moivre

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.2249119	0.2831761	0.3741725	0.5251215

Tabla 9 – Seguro vida entera - Según Edad - Gompertz

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.08612019	0.2057842	0.4327841	0.7246838

Tabla 10 – Seguro vida entera - Según Edad - Makeham

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.0964849	0.2130730	0.4363237	0.7255505

Considerando que el seguro vida entera es, en cierta forma, un caso particular de seguro temporario (de plazo w-x), valen en lo pertinente las conclusiones a las que habíamos arribado al analizar aquel seguro. La información que aportan estos nuevos cuadros (en particular para la ley de Gompertz y Makeham) son las cotas superiores de los ppu de los seguros temporarios a las diferentes edades cuando se considera el mayor plazo posible, dada la tabla de mortalidad implícita.

Al variar los parámetro B y A y c y A

Las Figuras siguientes (Figuras 3 y 4) reflejan que sucede al variar, por un lado, el parámetro B, para distintos valores de A, y por otro lado, que ocurre al variar c, para distintos valores de A.

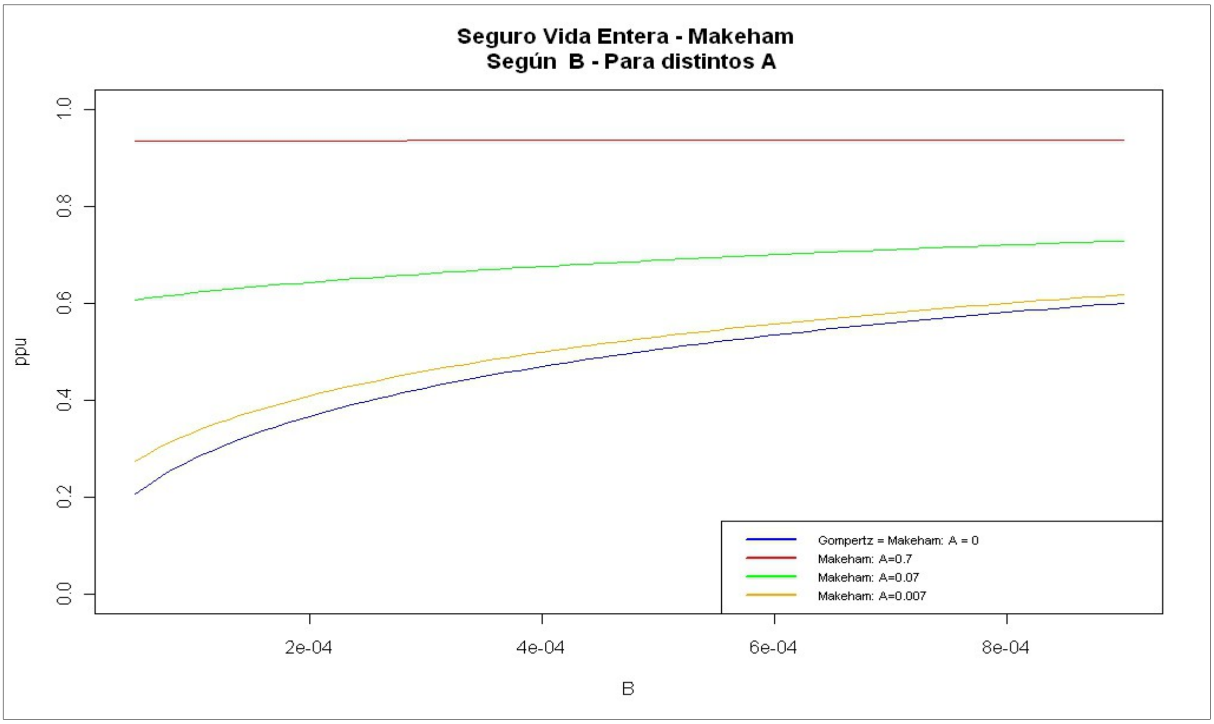

Figura 3 – Seguro vida entera – PPU bajo Makeham - Según B, para distintos A.

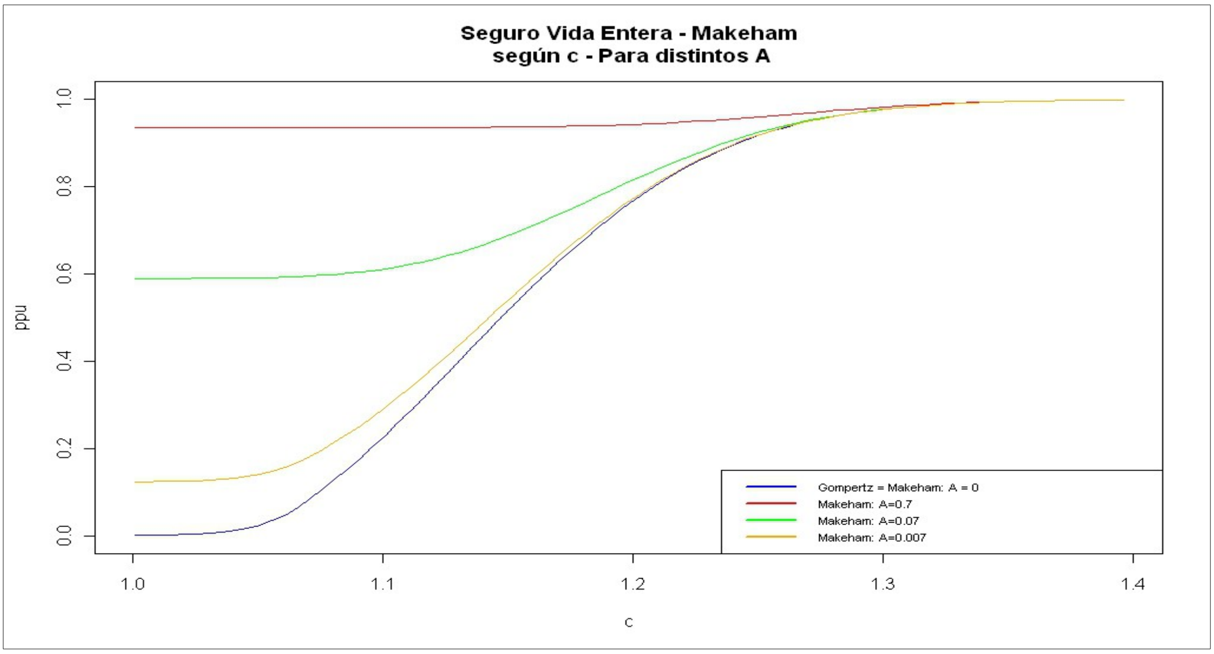

Figura 4 – Seguro vida entera - PPU bajo Makeham - Según c, para distintos A.

Valen los comentarios ya hechos respecto al vínculo entre los seguros vida entera y los temporarios.

- **<u>Seguro Dotal Puro n años</u>**

Al variar la edad

En las tablas 11 a 13 vemos que ocurre al variar la edad, para las tres leyes en estudio.

Tabla 11 – Seguro Dotal Puro - Según Edad - De Moivre

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.545701	0.526211	0.491131	0.409276

Tabla 12 – Seguro Dotal Puro - Según Edad - Gompertz

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.610742	0.594178	0.499542	0.167179

Tabla 13 – Seguro Dotal Puro - Según Edad - Makeham

Edad	**20**	**40**	**60**	**80**
E(Z)	0.606482	0.590033	0.496057	0.166013

En primer lugar, se puede observar que los valores de los distintos cuadros de este seguro tienen un comportamiento totalmente distinto a los de los seguros anteriores. Ello se debe, como razón principal, a que este seguro paga la indemnización en el momento que corresponda si la persona está viva mientras que en los anteriores la condición para el pago de la indemnización es el fallecimiento.

Por otra parte, se reitera la inadecuación de la ley de De Moivre para vidas humanas y la similitud de los valores que se obtienen de la aplicación de la ley de Gompertz y Makeham. Resulta interesante analizar para estas dos últimas leyes como se produce el decrecimiento del ppu a medida que se avanza en la edad.

Al variar n

Tabla 14- Seguro Dotal Puro - Según n - De Moivre

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.526211	0.132216	0.060877	0.024915

Tabla 15- Seguro Dotal Puro - Según n - Gompertz

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.594178	0.167861	0.061398	0.010265

Tabla 16- Seguro Dotal Puro - Según n – Makeham

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0.590033	0.164373	0.059703	0.009911

Se puede observar que al igual que en el análisis por edad los valores de los distintos cuadros de este seguro tienen un comportamiento totalmente distinto a los de los seguros anteriores. Ello se debe a la misma razón que se mencionaba cuando se hacía el análisis por edad.

Por otra parte, se reitera la inadecuación de la ley de De Moivre para vidas humanas y la similitud de los valores que se obtienen de la aplicación de la ley de Gompertz y Makeham. Resulta interesante analizar para estas dos últimas leyes como se produce el decrecimiento del ppu a medida que crece n.

Cuando se analiza este seguro, en función de los parámetros B, C y A valen en lo pertinente las mismas conclusiones ya mencionadas.

Al variar B

Tabla 17- Seguro Dotal Puro - Según B - Gompertz

B	**0.00005**	**0.00009**	**0.0005**	**0.0009**
E(Z)	0.5941781	0.5788477	0.4427954	0.3409416

Tabla 18- Seguro Dotal Puro - Según B - Makeham

B	**0.00005**	**0.00009**	**0.0005**	**0.0009**
E(Z)	0.590033	0.574809	0.439706	0.338563

Al variar c

Tabla 19 - Seguro Dotal Puro - Según c - Gompertz

c	**1,096478**	**1,11**	**1,21**	**1,31**
E(Z)	0.618720	0.6220731	0,07	0.9822312

Tabla 20 - Seguro Dotal Puro - Según c - Makeham

c	**1,096478**	**1,11**	**1,21**	**1,31**
E(Z)	0.590033	0.5756899	0.0280917	0

Al variar A

Tabla 21 - Seguro Dotal Puro - Según A - Makeham

A	**0.0005**	**0.0007**	**0,005**	**0,007**
E(Z)	0.591215	0.590033	0.565200	0.554008

- **Seguro Dotal Mixto**

Lo que sucede al variar la edad, puede apreciarse en la figura 5.
En primer lugar, es necesario tener en cuenta que como el seguro dotal mixto es en realidad un seguro de muerte temporario y un seguro dotal puro por igual plazo, los resultados que se obtienen respecto al ppu para la ley de De Moivre en este caso arrastran los problemas ya mencionados cuando se analizaron los ppu de sus componentes.

Por otra parte, para las leyes analíticas de Gompertz y Makeham (para los que se observan ppu muy similares) es particularmente interesante la evolución del ppu según edad.

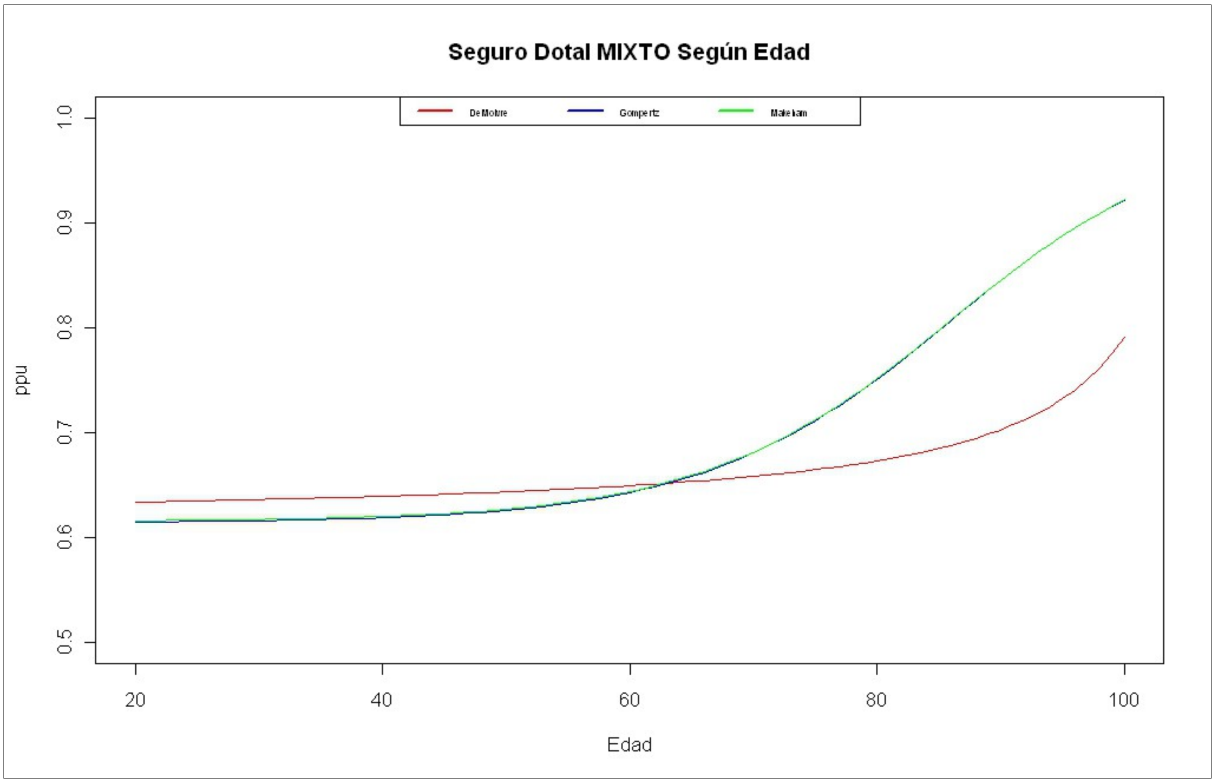

Figura 5 – Seguro Dotal Mixto - ppu bajo De Moivre, Gompertz y Makeham - Según Edad

Al variar n

Tabla 22 – Seguro Dotal Mixto – Según n - De Moivre

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0,639257	0,357268	0,312085	0,292181

Tabla 23 – Seguro Dotal Mixto – Según n – Gompertz

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0,618719	0,276341	0,222688	0,207394

Tabla 24 – Seguro Dotal Mixto – Según n – Makeham

n	**10**	**30**	**40**	**50**
E(Z)	0,61994	0,28184	0,22946	0,21462

Como ya se dijo, es necesario tener en cuenta que como el seguro dotal mixto es en realidad un seguro de muerte temporario y un seguro dotal puro por igual plazo, los resultados que se obtienen respecto al ppu para la ley de De Moivre arrastran los problemas ya mencionados cuando se analizaron los ppu de sus componentes.

Cuando se analiza este seguro, en función de los parámetros B, C y A valen en lo pertinente las mismas conclusiones ya mencionadas.

Al variar B

Tabla 25- Seguro Dotal Mixto - Según B - Gompertz

B	**0.00005**	**0.00009**	**0.0005**	**0.0009**
E(Z)	0.618720	0.622499	0.658101	0.687962

Tabla 26- Seguro Dotal Mixto - Según B - Makeham

B	**0.00005**	**0.00009**	**0.0005**	**0.0009**
E(Z)	0.619936	0.623697	0.659137	0.688884

Al variar c

Tabla 27- Seguro Dotal Mixto - Según c - Gompertz

c	**1,096478**	**1,11**	**1,21**	**1,31**
E(Z)	0.618720	0.6220731	0.806904	0.9822312

Tabla 28 - Seguro Dotal Mixto - Según c - Makeham

c	**1,096478**	**1,11**	**1,21**	**1,31**
E(Z)	0.619936	0.623274	0.807295	0.982235

Al variar A

Tabla 29 - Seguro Dotal Mixto - Según A - Makeham

A	**0.0005**	**0.0007**	**0,005**	**0,01**
E(Z)	0.619590	0.619936	0.627293	0.630647

Resultados para las distintas rentas

A continuación se presentarán los resultados obtenidos para las rentas planteadas en nuestro desarrollo previo, bajo la aplicación de la ley analítica de mortalidad de De Moivre, Gompertz, y Makeham.

A menos mención expresa en contrario, w = 110, x (edad de la persona) = 40, n (plazo de las operaciones temporarias) es igual a 10 y la tasa efectiva anual es 0,05.

Para la aplicación práctica de la fórmula de De Moivre se utilizará como valor de referencia de la edad máxima la ya mencionada en el párrafo anterior.

Para la aplicación práctica de las fórmulas de Gompertz y Makeham se partirá de los valores de los parámetros utilizados para la elaboración de una tabla de mortalidad ilustrativa, según Bowers (Bowers et al, 1997). Dichos parámetros son: B = 0.00005, c =1.096478 y A = 0.0007

- **Renta de Vida temporaria n años, un pago por año de $ 1, adelantada**

Al variar edad

En la figura 6, puede apreciarse que es lo que ocurre al variar la edad, para las tres leyes analíticas de mortalidad consideradas

En los resultados obtenidos, se puede apreciar la inadecuación de la ley de De Moivre para el caso de vidas humanas y la razonabilidad de los resultados obtenidos con las otras dos fórmulas. Para Gompertz y Makeham, resulta interesante ver la evolución del vpa de esta renta con la edad. Efectivamente para las edades avanzadas el incremento de la probabilidad de fallecer hace caer de manera cada vez más abrupta el correspondiente vpa.

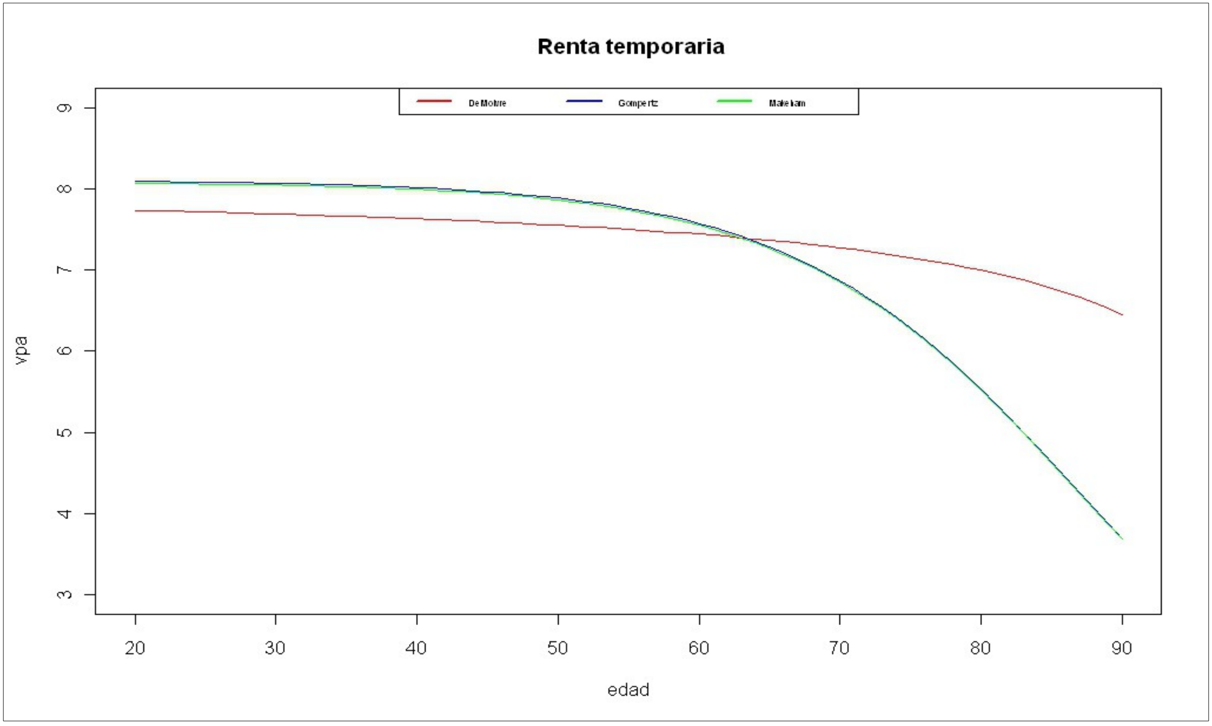

Figura 6 – Renta Temporaria - v.p.a bajo De Moivre, Gompertz y Makeham - Según Edad

Al variar n

En la figura 7, puede apreciarse que es lo que ocurre al variar n para las tres leyes analíticas de mortalidad consideradas.

La situación para la ley de De Moivre ya ha sido abundantemente mencionada. Para las otras leyes, la evolución según n muestra un crecimiento del vpa a medida que crece n (existe probabilidad positiva de que hayan más pagos) y que dicho crecimiento es marginal decreciente al crecer n (el aporte al vpa resulta cada vez menor).

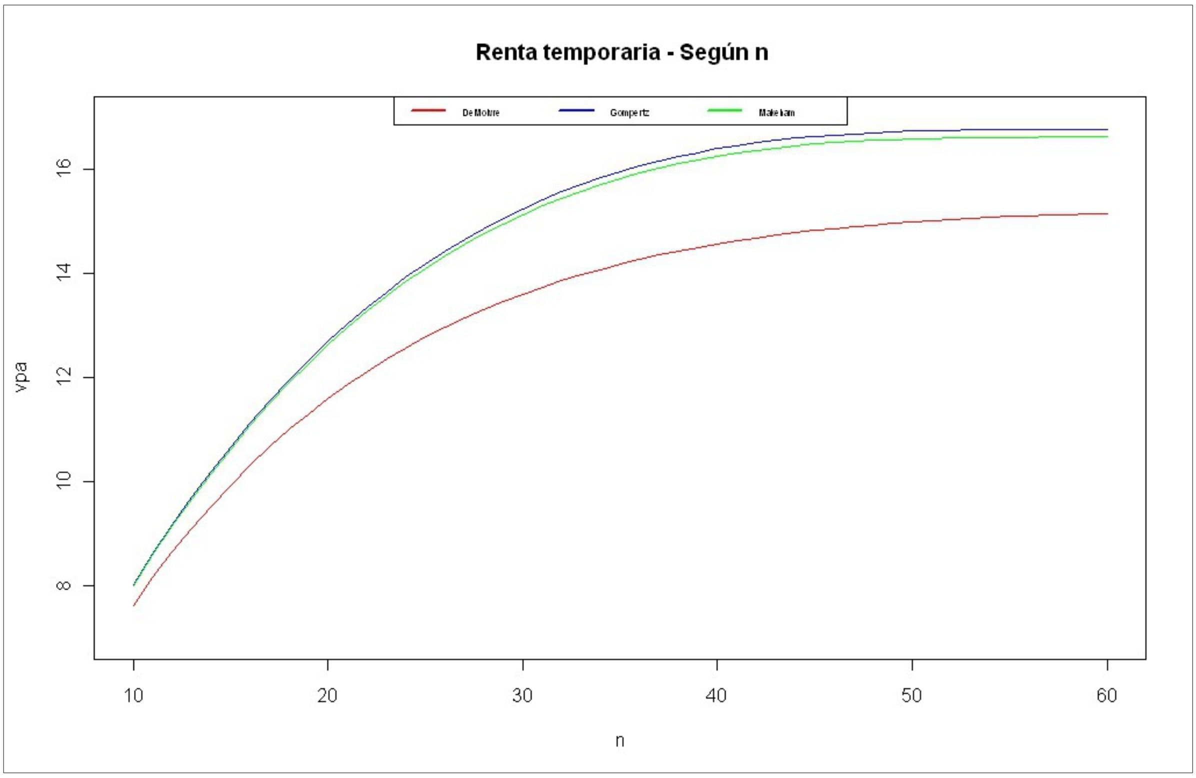

Figura 7 – Renta Temporaria - vpa bajo De Moivre, Gompertz y Makeham - Según n

Al variar B

Lo que ocurre al variar el parámetro B, para las leyes de Gompertz y Makeham, se puede observar en las tablas 30 y 31 respectivamente.

Tabla 30 – Renta Temporaria n años $1 por año – Según B – Gompertz

B	**0,00005**	**0,00009**	**0,0005**	**0,0009**
vpa	8,019180	7,949396	7,288220	6,727737

Tabla 31 – Renta Temporaria n años $1 por año – Según B – Makeham

B	**0,00005**	**0,00009**	**0,0005**	**0,0009**
vpa	7,996357	7,926881	7,268586	6,710493

Estos cuadros permiten apreciar el impacto de B (factor de escala del componente exponencial asociado al riesgo por edad de las fórmulas analíticas de Gompertz y Makeham) sobre el vpa de la renta: al crecer el valor del parámetro el vpa de la renta decrece en una proporción sensiblemente menor. La disminución del vpa de la renta se explica por el hecho de que al crecer B, la fuerza de la mortalidad aumenta y por ende la supervivencia se reduce (con lo cual se afecta la cantidad esperada de pagos).

Al variar c

Lo que ocurre al variar el parámetro c, para las leyes de Gompertz y Makeham, se puede observar en las tablas 32 y 33 respectivamente.

Tabla 32 – Renta Temporaria n años $1 por año – Según c – Gompertz

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
vpa	8,01918	7.957637	4.454421	1.058306

Tabla 33 – Renta Temporaria n años $1 por año – Según c – Makeham

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
vpa	7.996357	7.932356	4.446572	1.058265

Estos cuadros permiten apreciar el impacto de c (parámetro asociado al riesgo por edad de las fórmulas analíticas de Gompertz y Makeham) sobre el vpa de la renta: al crecer el valor del parámetro el vpa de la renta decrece en mayor proporción. La disminución del vpa de la renta se explica por el hecho de que al crecer c, la fuerza de la mortalidad aumenta y por ende la supervivencia se reduce (con lo cual se afecta la cantidad esperada de pagos). Se observa también que algunos de los valores de c que se muestran en las tablas no son compatibles con la consideración de vidas humanas.

Al variar A

Al variar A, bajo la aplicación de la ley de Makeham, lo que ocurre con el vpa, puede observarse en la tabla 34.

Tabla 34 – Renta Temporaria n años $1 por año – Según A – Makeham

A	0,0002	0,0007	0,002	0,007
vpa	8,01265	7,99635	7,95423	7,79524

Tal como era dable esperar, el impacto del crecimiento del parámetro A provoca que el vpa de la renta decrezca en menor proporción.

- **<u>Renta de Vida Vitalicia, un pago por año de $ 1, adelantada</u>**

Al variar edad

La figura presentada a continuación, Figura 8, muestra que es lo que ocurre para este tipo de rentas, al variar la edad, para cada una de las distintas leyes.

En los resultados obtenidos, se puede apreciar la inadecuación de la Ley de De Moivre para el caso de vidas humanas y la razonabilidad de los resultados obtenidos con las otras dos fórmulas. Para Gompertz y Makeham, resulta interesante ver la evolución del vpa de esta renta con la edad. Efectivamente para las edades avanzadas el incremento de la probabilidad de fallecer hace caer de manera cada vez más abrupta el correspondiente vpa.

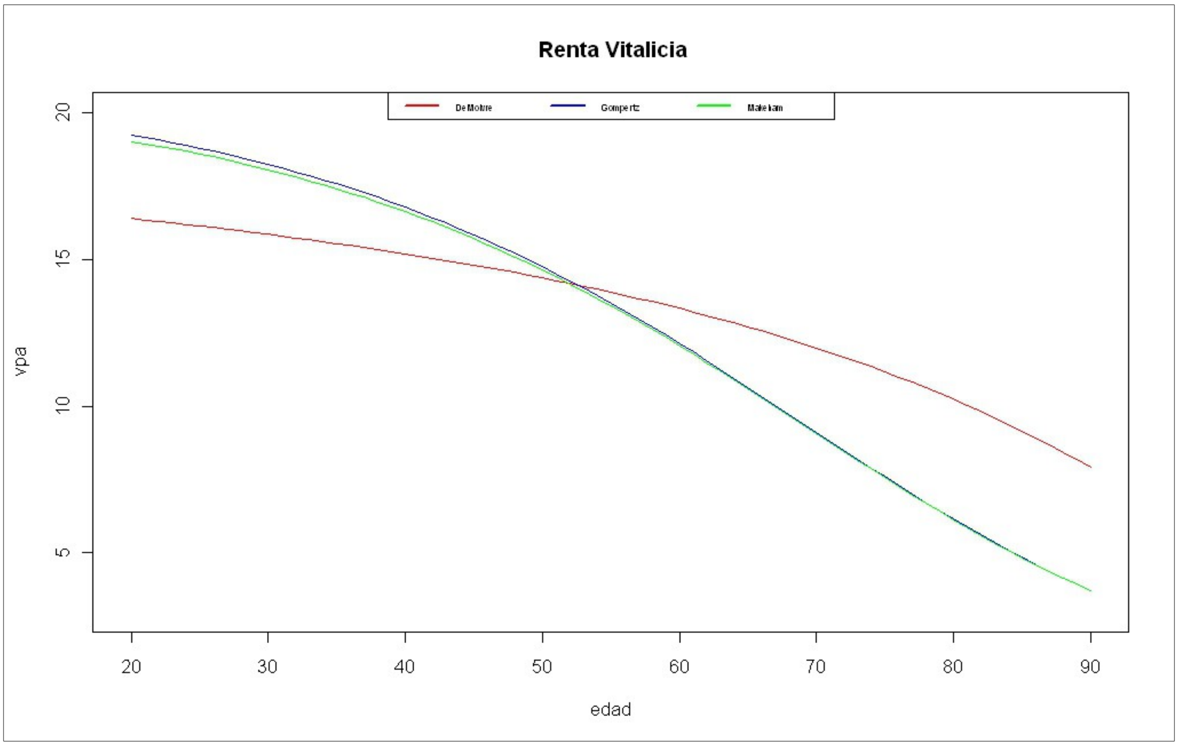

Figura 8 – Renta Vitalicia - vpa bajo De Moivre, Gompertz y Makeham - Según Edad

Al variar B

Lo que ocurre al variar el parámetro B bajo la aplicación de Gompertz y Makeham, puede verse en las tablas 35 y 36 respectivamente.

Tabla 35 – Renta Vitalicia $1 por año – Según B – Gompertz

B	**0,00005**	**0,00009**	**0,0005**	**0,0009**
vpa	16.78244	15.55463	10.65304	8.697193

Tabla 36 – Renta Vitalicia $1 por año – Según B – Makeham

B	**0,00005**	**0,00009**	**0,0005**	**0,0009**
vpa	16.63311	15.42964	10.59788	8.660959

Las conclusiones que se obtienen de estos cuadros son básicamente las mismas que las que se obtenían en caso de la renta temporaria. Como comentarios adicionales, vale la pena mencionar que el vpa de la renta vitalicia para el menor valor de B, es poco más que el doble del que se obtenía para la renta temporaria por 10 años y, que ahora la caída del vpa, entre un extremo y otro de los valores de B, es más pronunciada que antes.

Al variar c

En las tablas 37 y 38, puede verse que es lo que sucede al variar el parámetro c, para la aplicación tanto de Gompertz como de Makeham.

Tabla 37 – Renta Vitalicia $1 por año – Según c – Gompertz

c	**1,096478**	**1,11**	**1,21**	**1,31**
vpa	16.78244	15.26099	4.502071	1.058306

Tabla 38 – Renta Vitalicia $1 por año – Según c – Makeham

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
vpa	16.63311	15.14303	4.493869	1.058265

Valen en lo pertinente, las mismas conclusiones obtenidas cuando se hizo el análisis para las rentas temporarias. Un efecto interesante es que mientras que el vpa es algo más del doble que en las rentas temporarias para los menores valores de c, el vpa de las rentas vitalicias prácticamente no se modifica cuando se los compara con el correspondiente a las rentas temporarias, para los valores mayores del parámetro c (pero recordar que precisamente para estos valores los resultados no se corresponden razonablemente con la consideración de vidas humanas).

Al variar A

Al variar A, bajo Makeham, se obtienen los resultados presentados en la tabla 39:

Tabla 39 – Renta Vitalicia $1 por año- Segùn A – Makeham

A	0,0002	0,0007	0,002	0,007
vpa	16.73954	16.63311	16.36174	15.38576

Valen las consideraciones hechas para el caso de las rentas temporarias, con el agregado de la relación entre el vpa de las rentas vitalicias y el vpa de las rentas temporarias para los valores menores de A y la más pronunciada reducción del vpa de las rentas vitalicias respecto al que se observaba en el caso de las rentas temporarias.

- **Renta de Vida temporaria n años, r pagos de $1 por año, adelantada**

El comportamiento que se observa para este tipo de rentas (que se identifican como temporarias fraccionarias) es similar al de las rentas temporarias que ya analizamos y las conclusiones son análogas, por lo que no se reiteran.
El único elemento nuevo que se agrega es r (número de pagos en el año): los resultados se derivan directamente de la consideración del vpa de este tipo de rentas, deducido oportunamente en base a la aplicación de la fórmula de Woolhouse.

A continuación se presentan exclusivamente los resultados obtenidos

Al variar edad

En las tablas 40 a 42 puede verse cuales son los resultados obtenidos al variar la edad, para cada una de las distintas leyes.

Tabla 40 – Renta de Vida temporaria n años, 12 pagos de $1 por año - De Moivre

Edad	20	40	60	80	90
vpa	90.36395	88.99067	86.51878	80.75103	73.54135

Tabla 41 – Renta de Vida temporaria n años, 12 pagos de $1 por año - Gompertz

Edad	20	40	60	80	90
vpa	94,98310	93,96202	88,10303	61,75048	38,83464

Tabla 42 – Renta de Vida temporaria n años, 12 pagos de $1 por año - Makeham

Edad	20	40	60	80	90
vpa	94,68185	93,70147	87,86624	61,61473	38,77423

Al variar n

Las Tablas 43 a 45, presentadas a continuación, muestran qué es lo que ocurre para este tipo de rentas, al variar el parámetro n, para cada una de las distintas leyes

Tabla 43 – Renta Temporaria n años 12 pagos de $1 por año – De Moivre

n	10	30	40	50	60
vpa	88,9907	158,5681	169,7213	174,6371	176,4695

Al variar n, los resultados para Gompertz son los siguientes:

Tabla 44 – Renta Temporaria n años 12 pagos de $1 por año – Gompertz

n	10	30	40	50	60
vpa	93,99814	178,43820	191,69320	195,48570	195,88440

Mientras que los obtenidos para Makeham son los presentados en la Tabla 45

Tabla 45 – Renta Temporaria n años 12 pagos de $1 por año – Makeham

n	10	30	40	50	60
vpa	93,70147	177,08770	190,02970	193,70830	194,09260

Al variar r

Las Tablas 46 a 48, presentadas a continuación, muestran qué es lo que ocurre para este tipo de rentas, al variar el parámetro r, para cada una de las distintas leyes

Tabla 46 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – De Moivre

r	12	4	3
vpa	88,9907	29,8214	22,4253

Tabla 47 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Gompertz

r	12	4	3
vpa	93,99814	31,46799	23,65172

Tabla 48 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Makeham

r	12	4	3
vpa	93,70147	31,37048	23,57910

Al variar B

Al variar B se obtiene, por un lado, los resultados presentados en las tablas 49 y 50.

Tabla 49 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según B - Gompertz

B	0,00005	0,00009	0,0005	0,0009
vpa	93,998140	93,076420	84,394010	77,11

Tabla 50 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según B Makeham

B	0,00005	0,00009	0,0005	0,0009
vpa	93,70147	92,78403	84,14143	76,89

Al variar c

Por otro lado, al variar c, se obtienen los resultados de las tablas 51 y 52.

Tabla 51 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según c - Gompertz

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
vpa	93.99814	93.14454	48.10864	7.199676

Tabla 52 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según c - Makeham

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
vpa	93.70147	92.88737	48.01336	7.199175

Al variar A

Al aplicar la ley analítica de mortalidad propuesta por Makeham, haciendo variar el parámetro A, los resultados que se obtienen son los presentados en la tabla 53.

Tabla 53 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según A - Makeham

A	0,0002	0,0007	0,002	0,007
vpa	93,91324	93,70147	93.154	91,09

- **Renta de Vida Vitalicia, r pagos de $1 por año, adelantada**

El comportamiento que se observa para este tipo de rentas (que se identifican como vitalicias fraccionarias) es similar al de las rentas vitalicias que ya analizamos y las conclusiones son análogas, por lo que no se reiteran.

El único elemento nuevo que se agrega es r (número de pagos en el año): los resultados se derivan directamente de la consideración del vpa de este tipo de rentas, deducido en base a la aplicación de la fórmula de Woolhouse.

A continuación se presentan exclusivamente los resultados obtenidos

Al variar edad

Los resultados obtenidos al variar edad, para cada una de las leyes, pueden verse en las tablas 54 a 56.

Tabla 54 – Renta Vitalicia 12 pagos de $1 por año – De Moivre

Edad	20	40	60
vpa	191,1938	176,8665	154,4902

Tabla 55 – Renta Vitalicia 12 pagos de $1 por año – Gompertz

Edad	20	40	60
vpa	225,3192	195,8893	140,0689

Tabla 56 – Renta Vitalicia 12 pagos de $1 por año – Makeham

Edad	20	40	60
vpa	222,7707	194,0973	139,1990

Al variar r

Al variar r lo que ocurre, para cada una de las leyes en estudio, aparece reflejado en las tablas 57 a 59

Tabla 57 – Renta Vitalicia r pagos de $1 por año – De Moivre

r	12	4	3
vpa	176.8665	59.28883	44.59162

Tabla 58 – Renta Vitalicia r pagos de $ 1 por año – Gompertz

r	12	4	3
vpa	195,88930	65,62977	49,34733

Tabla 59 – Renta Vitalicia r pagos de $ 1 por año – Makeham

r	12	4	3
vpa	194,09730	65,03244	48,89933

Al variar B

Al variar B, tanto para Gompertz como para Makeham, se obtienen los resultados presentados en las tablas 60 y 61

Tabla 60 – Renta Vitalicia r pagos de $1 por año – Según B - Gompertz

B	0,00005	0,00009	0,0005	0,0009
Vpa	195.8893	181.1556	122.3365	98.86632

Tabla 61 – Renta Vitalicia r pagos de $1 por año – Según B - Makeham

B	0,00005	0,00009	0,0005	0,0009
Vpa	194.0973	179.6557	121.6745	98.4315

Al variar c

Al variar c, tanto para Gompertz como para Makeham, se obtienen los resutados presentados en las tablas 62 y 63

Tabla 62 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según c - Gompertz

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
Vpa	195.8893	177.6318	48.52485	7.199676

Tabla 63 – Renta Temporaria 10 años r pagos de $1 por año – Según c - Makeham

c	1,096478	1,11	1,21	1,31
Vpa	194.0973	176.2164	48.42643	7.199175

Al variar A

Al cambiar el valor de A, en la ley de Makeham, y calcular el vpa para esta renta, obtenemos los resultados presentados en la Tabla 64.

Tabla 64 – Renta Vitalicia 12 pagos de $1 por año – Makeham

A	0,0002	0,0007	0,002	0,007
Vpa	195,37450	194,09730	190,84080	179,12910

Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo es analizar lo que ocurre al realizar el cálculo del premio puro único de determinados seguros, así como el valor presente actuarial de un determinado conjunto de rentas, bajo la aplicación de tres leyes analíticas de mortalidad.

Para ello, lo primero que se hizo fue una presentación de las variables aleatorias fundamentales a utilizar, especificando, para cada una de ellas tanto la función de distribución como la función de densidad o de cuantía. Se especificaron, luego, conceptos claves vinculados a ciertos seguros de vida, a algunos tipos de rentas y a las tres leyes analíticas de mortalidad que se utilizaron en el desarrollo posterior. Para cada ley se especificaron los parámetros a utilizar a menos mención expresa en contrario. A partir de estos valores se realizaron análisis de sensibilidad.

En lo que refiere a las variables utilizadas, los resultados más interesantes radican en el hecho de la posibilidad de encontrar la distribución tanto de la variable aleatoria valor presente del pago de la indemnización en los seguros de vida (lo que aparece detallado en el trabajo) como de la variable aleatoria valor presente de los pagos de una renta de vida (lo que no aparece detallado en profundidad en el trabajo por razones de extensión)

En lo que refiere a las leyes analíticas de mortalidad,lo primero que se puede concluir, en función de los resultados obtenidos, es el hecho de que la ley analítica de mortalidad propuesta por De Moivre, no resulta ser aplicable al análisis de vidas humanas. Esto puede deberse a que una de las hipótesis de la que parte dicha ley, es la uniformidad de fallecimientos según edad, lo cual no se verifica en poblaciones humanas.

Por otra parte, las leyes analíticas planteadas tanto por Gompertz como por Makeham, se adaptan al tratamiento de la mortalidad de vidas humanas. Al desarrollar el trabajo se pudo observar que ello resulta válido para cierto rango de valores de los parámetros. Finalmente, cabe destacar que la ley de Makeham recoge conceptualmente un factor adicional de mortalidad que la ley de Gompertz, referido a la incidencia de los fallecimientos no dependientes de la edad.

Bibliografía

[1] Bowers,Newton L.,Gerber,Hans U.,Hickman,James C.,Jones,Donald A.,Nesbitt,Cecil J.1997. "*Actuarial Mathematics".* Editado por Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.

[2] De Vicente Merino A., Hernández March J., Albarrán Lozano I., Ramírez Pérez C. 2002 "Proyección y estudio de una población. El papel de la mortalidad." [En línea], Disponible en: http://eprints.ucm.es/6765/1/0203.pdf [Consultado el 03 de julio de 2011].

[3] Gonzalez Manjarrez, Miguel A. 2008 "Modelo de valuación y cobertura de riesgos con componentes vivos" [En línea], Disponible en: http://www.inteligencianet.com/in/pluginfile.php/7940/mod_page/content/4/ModelodeValuacionyCobertura.pdf. [Consultado el 03 de julio de 2011].

[4] David Promislow S."Fundamentals of Actuarial Mathematics".2011. Editado por Wiley

[5] Gerber,Hans U. "Life insurance mathematics". 1995 Editado por Springer - Verlag

[6] David C. M. Dickson, Mary R. Hardy, Howard Waters "Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks". 2009. Editado por Cambridge University .