PLANES DE PENSIÓN: MÉTODOS DE COSTO ACTUARIAL

Cr. Sergio Barszcz [1]/

RESUMEN

En una primera parte de este trabajo se retoman los valores presentes actuariales de las contribuciones y beneficios futuros respecto a un participante de un plan de pensiones.

De esta forma, si el plan de pensiones pretende dar seguridad a sus participantes, la concesión de tales beneficios futuros requerirá que los activos disponibles a la fecha junto con el valor presente actuarial de las futuras contribuciones se equilibren con tales beneficios futuros.

El esquema de contribuciones requerido para lograr tal balance con los pagos de beneficios recibe la denominación de método de costo actuarial o método de financiación, aspecto cuyo análisis, constituye el objetivo del trabajo.

El marco teórico del trabajo está dado por los conceptos actuariales que se utilizan y la metodología de trabajo implica la definición de funciones útiles para resumir la situación de financiación de un plan de pensión

Utilizaremos dichas funciones para definir y analizar las propiedades de los métodos individuales y colectivos de costo actuarial y se procurará exhibir resultados o relaciones entre ellos, en el tiempo disponible para hacer la exposición, que permitan conceptualizar de forma simple pero rigurosa el tema en cuestión.

Este campo de la ciencia actuarial tiene un abundante desarrollo bibliográfico. No obstante, hay desarrollos recientes, cuyos aportes justifican la presentación de líneas de trabajo que vale la pena explorar. Ello se observa tanto desde la perspectiva conceptual como de las posibilidades que nos suministran las herramientas cuantitativas

En relación a este último aspecto, veremos la cantidad de supuestos determinísticos que deberemos realizar, lo que nos dará una clara idea de lo mucho que se puede hacer para perfeccionar las bases conceptuales de un tema de importancia para el siglo XXI.

Palabras claves 1: Planes de pensión, Palabras claves 2: Métodos de costo actuarial

[1] / Profesor Titular Departamento de Métodos Matemáticos Cuantitativos – Facultad de Ciencias Económicas y de Administración – Universidad de la República.

Introducción

Una de las aplicaciones más importantes de los modelos de decremento múltiple se da en los planes de pensión. En primer lugar consideraremos métodos básicos usados para calcular el valor presente actuarial (vpa) de los beneficios y de las contribuciones para un participante de un plan de pensiones. Los participantes de un plan pueden ser un grupo de trabajadores de un único empleador o pueden ser los empleados de un grupo de empleadores que desarrollan actividades similares. Un plan pensado para la jubilación de un participante, típicamente provee jubilaciones por edad y años de servicios, por invalidez, por renuncia o despido o por muerte. Concentraremos nuestra atención en el beneficio de jubilación.

Un plan de pensiones puede ser visto como un sistema para comprar rentas de vida diferidas (pagaderas desde la jubilación hasta la muerte) y otros beneficios auxiliares, a través de una renta temporaria de contribuciones durante la vida activa. El balance de vpa de beneficios y contribuciones puede darse sobre una base individual pero frecuentemente es sobre una base agregada del grupo completo de participantes.

I) Valuación de planes de pensión.

Dos conjuntos de supuestos se requieren para determinar el vpa de los beneficios de un plan de pensiones y de las contribuciones que financian dichos beneficios. Estos conjuntos se refieren por un lado a supuestos demográficos (la tabla que describe la información de las personas en servicio activo, las funciones de supervivencia para las personas jubiladas,las discapacitadas o de los que se retiran voluntariamente o son despedidos) y los supuestos económicos (rendimiento de las inversiones y evolución de la escala salarial)

I.1)<u>Supuestos demográficos</u>

Un punto inicial para la valuación de los beneficios del plan de pensiones es una tabla de decremento múltiple construida para representar la evolución de un grupo de sobrevivientes de participantes sujetos, en los diversos años de su vida activa a probabilidades dadas por :

- Despido o renuncia del trabajo
- Fallecimiento en actividad
- Jubilación por invalidez y
- Jubilación por años de edad y de trabajo

La notación para estas probabilidades para el año de edad x a x+1 son respectivamente $q_x^{(w)}, q_{x,}^{(d)} q_x^{(i)}, q_{x,}^{(r)}$. Estas probabilidades permiten determinar $l_{x+1}^{(\tau)}$ a partir de $l_x^{(\tau)}$ haciendo: $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\left[1-\left(q_x^{(w)}+q_x^{(d)}+q_x^{(i)}+q_x^{(r)}\right)\right] = l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}$.

A pesar de que en el contexto del tema que estamos desarrollando, existen otros múltiples elementos que valdría la pena mencionar nos limitaremos a mencionar dos aspectos que se entienden relevantes: por un lado, la necesidad de considerar en ciertas situaciones tablas selectas y la ineludible necesidad de contar con una tabla de mortalidad adecuada para los jubilados.

I.2)<u>Supuestos económicos</u>

Dada la necesidad de considerar la evolución de los salarios de las vidas activas a lo largo del tiempo en las contribuciones al plan y para calcular los beneficios que suministrará, denotaremos $(AS)_{x+h}$ como la tasa de salario anual actual a la edad x+h de un participante que ingresó a la edad x y ahora ha alcanzado la edad x+h y $(ES)_{x+h+t}$ al salario anual proyectado a la edad x+h+t.

Supondremos que tenemos una función de escala salarial S_y para hacer estas proyecciones tal que: $(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h} \dfrac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$ donde la funciones salariales S_y reflejan incrementos de salarios por meritos, experiencia y en algunos países inflación.

Otro supuesto de importancia central (tanto es así que el otro trabajo que presentaremos en estas jornadas se concentra en estudiarlo) es el rendimiento de las inversiones que se hacen con los fondos disponibles en cada momento del tiempo. Dejaremos para dicha instancia, el análisis introductorio a tal tema.

I.3) Valor presente actuarial de las futuras contribuciones

Hay dos esquemas simples de contribuciones: un importe fijo por participante o un porcentaje fijo de salario por participante. Para cada uno de estos esquemas evaluaremos el vpa de las futuras contribuciones de un participante que ingresó a la edad x y tiene ahora x+h años de edad.

El vpa de las futuras contribuciones pagaderas en forma continua a una tasa de c por año puede escribirse como: $c\int_0^{w-x-h} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} dt \simeq c \sum_{k=0}^{k=w-x-h-1} v^{k+1/2} \cdot {}_{k+1/2} p_{x+h+1/2}^{(\tau)}$ donde para llevar a cabo la aproximación hemos utilizado el teorema del valor medio.

Por otra parte, si las contribuciones futuras son una fracción c del salario, entonces el vpa de las futuras contribuciones de un participante que gana actualmente $(AS)_{x+h}$ se puede expresar como $c(AS)_{x+h} \int_0^{w-x-h} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} . \dfrac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} .dt$, expresión que se puede aproximar por:

$$c\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{w-x-h-1} v^{k+1/2} \cdot {}_{k+1/2} p_{x+h}^{(\tau)} . S_{x+h+k}$$

aproximación, que hemos realizado suponiendo que la función de escala salarial es constante en cada año de edad y en el resto hemos utilizado el teorema del valor medio.

I.4) Planes de pensión

En la realidad existen planes de contribuciones definidas y de beneficios definidos.

Los planes de contribuciones definidas se caracterizan por el hecho de que el vpa es simplemente la acumulación a interés de las contribuciones hechas por o para el participante y el beneficio es una renta que puede ser comprada con el valor acumulado, tal renta generalmente es una renta vida entera.

En cambio los planes de beneficios definidos, que serán los únicos que analizaremos en este trabajo, se caracterizan por establecer las formas de determinación de los beneficios frente a las diversas contingencias.

A modo de ejemplo, veamos en primer lugar la evaluación y la aproximación al vpa de un beneficio de jubilación por edad. Asumiendo que la función de beneficios es R(x,h,t) y que el beneficio permanece nivelado y es vida entera tendremos que el vpa a la edad x+h+t es $VPA_{x+h+t} = R\left(x,h,t\right)\overline{a}^{r}_{x+h+t}$.

Ahora si quisiéramos calcular el vpa cuando la persona tiene x+h años de edad y considerando que α es la edad mínima de jubilación tendremos $VPA_{x+h} = \int_{\alpha-x-h}^{\infty} v^{t} \cdot {}_{t}p^{(\tau)}_{x+h} \cdot \mu^{(r)}_{x+h+t} . R\left(x,h,t\right) . \overline{a}^{r}_{x+h+t} . dt$ cálculo que se puede simplificar, utilizando el supuesto de edades fraccionarias en cada año de edad y aplicando el teorema del valor medio se puede aproximar por $VPA_{x+h} = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\infty} v^{k+1/2}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h} q^{(r)}_{x+h+k} R\left(x,h,k+1/2\right)\overline{a}^{r}_{x+h+k+1/2}$

II) Planes de beneficio definido.

II.1) Consideraciones iniciales

Los vpa de contribuciones y beneficios para un individuo que planteamos antes son insumos necesarios para determinar los vpa agregados del plan. Si el plan de pensiones ha de dar seguridad a los participantes, el vpa agregado de los beneficios futuros junto a los activos corrientes han de quedar balanceados con el vpa de los futuras contribuciones. El esquema de contribuciones agregadas requerido para balancear los beneficios futuros es determinado por un método de costo actuarial o de fondeo. Para ello definiremos funciones que nos permiten evaluar el grado de fondeo del plan. Tales funciones son usadas para definir los métodos de costo actuarial o de fondeo. Tales funciones son usadas para definir los métodos de costo actuarial y explorar sus propiedades.

En algunos desarrollos posteriores requeriremos hacer uso de un diagrama de Lexis, tema que este trabajo supone conocido por parte del lector. Los planes de pensión habitualmente suministran diversos beneficios. Nos limitaremos a presentar únicamente el beneficio de jubilación.

Los vpa requieren la utilización de la matemática financiera y las probabilidades. En nuestro desarrollo posterior los pagos futuros pueden depender de varios factores contingentes (para simplificar, usaremos un enfoque deterministico para algunos conceptos: la consecuencia inmediata de este hecho implica un cierto grado de simplificación que se deberá valorar adecuadamente, la alternativa es aleatorizar algunos de estos factores contingentes pudiendo complejizar el modelo pero teniendo siempre en cuenta una adecuada relación costo beneficio del proceso).

II.2) El modelo

Partimos de una población de miembros de edad a, que se jubilan a la edad r y están expuestos a una función de supervivencia, *s(x)* con *s(a)*=1. Para $a<x<r$, el decremento puede ocurrir por mortalidad u otras causas, pero para $x>r$ la mortalidad es la única causa de decremento. La densidad de nuevos ingresantes a la edad *a* en el tiempo u está dado por n(u) y la densidad de aquellos que alcanzan la edad x en el tiempo t está dado por:

$$n(u).s(x)$$

Donde $u=t-(x-a)$ es el momento de ingreso al plan.

También asumiremos que el salario de cada miembro de edad x en el momento 0 es $w(x)$, $a<x<r$. La función $w(x)$ expresa la experiencia individual y los méritos. Los salarios cambian además por un factor que refleja la mayor experiencia. Asumiremos que este factor se puede medir por $e^{\tau t}$. De esta forma la tasa anual de salarios esperados en el tiempo t para un miembro de edad x está dada por $w(x).\, e^{\tau t}, a<x<r$.

Si se utiliza el diagrama de Lexis, resulta fácil ver que la tasa de salario total en el tiempo t para los n(t-x+a).s(x).dx miembros de edades entre x y x+dx es

$$n(t-x+a).s(x).w(x).e^{\tau t}$$

y que los salarios anuales totales en el tiempo t son:

$$W_t = \int_a^r n(t-x+a).s(x).w(x).e^{\tau t}dx$$

Consideraremos, como ya se ha dicho, que el único beneficio del plan es la jubilación y supondremos que esta es una fracción f del salario final y por lo tanto que el pago proyectado a un miembro que se retira en el tiempo t es: $fw(r)e^{\tau t}$

Para un jubilado de edad x en el tiempo t la jubilación anual se proyecta como

$$fw(r)e^{\tau(t-x+r)}h(x) \text{ para x } \geq r$$

Donde h(x) representa un factor de ajuste aplicado al pago de la jubilacion inicial de $fw(r)\, e^{\tau(t-x+r)}$ para aquellos que se jubilaron hace x-r años. Note que h(r) =1 como ejemplo , h(x) puede ser la función exponencial exp[β(x-r)] donde β es una tasa constante de incremento (posiblemente relacionada con la tasa de inflación esperada).

A continuación el modelo en el que centraremos nuestra discusión será el plan de beneficios definidos para el cual analizaremos los métodos de costo actuariales.

II.3) Financiamiento terminal

Bajo el método de financiamiento terminal las pensiones no son financiadas por contribuciones hechas durante la vida activa. En vez de ello se hacen contribuciones al fondo únicamente al momento del retiro, la tasa de contribución requerida o **tasa de costo normal bajo el método de financiación terminal** en el tiempo t , denotado por ${}^{T}P_t$ es la tasa a la cual el vpa de las futuras jubilaciones de los miembros que alcanzan la edad r es incurrida en el tiempo t . Para determinar ${}^{T}P_t$ para el plan asumimos que se ganan intereses a una fuerza anual de δ y calcularemos el vpa de una renta de vida vitalicia pagadera en forma continua a una vida de edad r con incrementos anuales h(x) cuando la vida de edad r alcance la edad x . De esta forma:

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-\delta(x-r)}h(x)\frac{s(x)}{s(r)}dx$$

Recordando el diagrama de Lexis , tenemos n(t-r+a) s(r) dt miembros que alcanzan la edad r entre los tiempos t y t+dt que cobrarán jubilaciones a una tasa inicial de fw(r) exp(τt)por lo tanto

$$^{T}P_t = fw(r)e^{\tau t}n(t-r+a)s(r)\bar{a}_r^h$$

Veremos que $^{T}P_t$ es un elemento básico para varios desarrollos posteriores.

A menudo se hace referencia al caso exponencial, para el cual se cumple que:

- $n(u)=ne^{Ru}$

  Dado que hemos asumido que la función de supervivencia es independiente del tiempo y se puede ver que el tamaño de la población cambia exponencialmente a la tasa R pero con una distribución de la población estable por edad.

- $h(x)=e^{\beta(r-x).}$ Esto es las pensiones son ajustadas a una tasa constante anual β.

Antes de continuar analizando el caso exponencial, deberíamos entender sus limitaciones: es claro que las condiciones para el crecimiento o decrecimiento exponencial no pueden existir indefinidamente. Cuando se considera el caso exponencial, las tres tasas económicas claves ,interés δ, salarios τ y ajustes de jubilaciones β están interrelacionadas. Por ejemplo, es costumbre suponer que $\delta > \beta$ aunque han existido periodos de inflación inesperada donde vale lo opuesto. Si $\beta > \tau$, la consecuencia sería una mejora relativamente mayor en la posición económica de los jubilados en relación a los trabajadores activos y por ello se supone habitualmente que $\beta \leq \tau$

III) Funciones básicas para los jubilados

III.1. VPA de los beneficios futuros de los jubilados$(rA)_t$

Los n(t-x+a) s(x)dx miembros de edades entre x y x+dx en el tiempo t se jubilaron hace x – r años con jubilaciones anuales iniciales de $fw(r)e^{\tau(t-x+r)}$. Por cada unidad de jubilación inicial de un jubilado sobreviviente se mantiene un valor presente actuarial .

$$(rA)_t = \int_r^{\infty} n(t-x+a)\, fw(r)e^{\tau(t-x+r)}\left[\int_x^{\infty} e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy\right]dx$$

III.2 Tasa de pago de beneficios, B_t

Para los miembros jubilados hay que considerar una nueva función, B_t,la tasa de cancelación de los beneficios en el tiempo t.

Hemos visto que para los jubilados entre las edades x y x+dx fueron pagadas jubilaciones a una tasa inicial de $n(t-x+a).s(x).f.w(r).e^{\tau(t-x+r)}.dx$

A la edad x esta tasa ha sido ajustada por el factor h(x) entonces

$$B_t = \int_r^{\infty} n(t-x+a)\, s(x)\, fw(r)\, e^{\tau(t-x+r)} h(x)\, dx$$

Si diferenciamos B_t respecto a t, veremos que se obtienen tres términos:

1. La tasa a la cual las jubilaciones iniciales para los miembros recientemente retirados incrementa la tasa de pago de beneficios.
2. La tasa a la cual el pago de beneficios decrece por las muertes en el tiempo t
3. Un efecto ajuste que mide el monto por el cual la tasa de pago de beneficios esta siendo ajustada en el tiempo t.

III.3) La ecuación de asignación

Ahora podemos establecer una formula básica para los jubilados .

$$^{T}P_t + \delta(rA)_t = B_t + \frac{d}{dt}(rA)_t$$

La ecuación puede ser explicada a través de la teoría del interés compuesto considerando $(rA)_t$ como un fondo al cual se paga la financiación terminal y los intereses y del cual se cobran las jubilaciones. La diferencia entre la tasa total de ingresos y la tasa total de egresos determina la tasa de cambio de tamaño de fondo.

III.4)Acumulación de pasivos actuariales

Los métodos de costo actuarial difieren en la tasa a la cual las obligaciones por jubilaciones futuras son reconocidas durante el tiempo de vida laboral de los trabajadores participantes. El método de financiación terminal no reconocía el pasivo hasta alcanzada la edad de retiro r. Para expresar la acumulación del pasivo para una jubilación que comenzara a la edad r definimos para un método de costo una función de acumulación M(x).M(x) representa la fracción del valor actuarial de las futuras jubilaciones acumuladas como un pasivo actuarial a la edad x bajo el método de costo actuarial . M(x) es una función no decreciente , continua por la derecha respecto a la variable edad, que cumple además que $0 \leq M(x) \leq 1$ para todo $x \geq a$.

La función M(x) puede ser definida en términos de una función de densidad de acumulación denotada por m(x) tal que

$$M(x) = \int_a^x m(y)\, dy \quad x \geq a$$

Note la analogía entre M(x) y m(x) con la función de distribución y la función de densidad de una variable aleatoria X. En general asumiremos que m(x) es continua para a<x<r y que m(x)=0 para los x>r. En el caso continuo se deduce que $m(x)=M'(x)$ en los puntos de discontinuidad de M'(x) ,la densidad m(x) no esta definida y podremos asignarle un valor arbitrario , por ejemplo, el limite por la izquierda o por la derecha.

La ventaja de contar con la función de acumulación es que podremos desarrollar modelos de pensión de toda una familia de métodos de costos actuariales en vez de hacerlo por separado para cada método.

IV. Funciones básicas para vidas activas

IV.1 VPA de los futuros beneficios , $(aA)_t$

Los n(t-x+a) s(x) miembros de edades entre x y x+dx en el tiempo t al final de los r-x años habrán generado el costo del financiamiento terminal de ${}^{T}P_{t+r-x}$ dx por lo tanto

$$(aA)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P_{t+r-x}\, dx$$

IV.2) Tasa de costo normal ,P_T

Asumiremos que un método de costo actuarial con función de acumulación M(x) ha sido elegido. Queremos ahora expresar la tasa de costo normal del plan, esto es, mostrar la función que, para nuestro modelo continuo asigna el vpa de los beneficios futuros de jubilación a los diversos tiempos de valuación en la vida de un participante activo .Como en el párrafo anterior la financiación terminal futura para los miembros de edades entre x y x+dx en el tiempo t es ${}^{T}P_{t+r-x}$ dx.En la función de costo normal este pasivo ha sido reconocido a la tasa de densidad de acumulación m(x). Tenemos

$$P_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P_{t+r-x}\, m(x)\, dx$$

IV.3 Pasivo actuarial acumulado $(aV)_t$

Asumiremos que un método de costo actuarial con función de acumulación M(x) ha sido elegido. El pasivo actuarial acumulado para las vidas activas en el tiempo t esta dado por

$$(aV)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P_{t+r-x}\, M(x)\, dx$$

Haciendo cuentas llegamos a

$$P_t + \delta(aV)_t = {}^{T}P_t + \frac{d}{dt}(aV)_t$$

Esta ecuación puede ser interpretada del punto de vista de la teoría del interés compuesto . Consideramos el pasivo actuarial acumulado ,$(aV)_t$ como un fondo al cual se le paga los costos normales a la tasa P_t y del cual se transfieren las financiaciones terminales a la tasa ${}^{T}P_t$ cuando se jubilan los miembros activos. El lado izquierdo de la ecuación es la tasa de ingreso al fondo por costos normales e intereses. El lado derecho de la ecuación asigna este ingreso a la tasa de financiación terminal y a la tasa de cambio de tamaño de fondo.

IV.4. VPA de los futuros costos normales , $(Pa)_t$

Al hablar del vpa de los futuros beneficios dijimos que n(t-x+a) s(x) miembros de edades entre x y x+dx al tiempo t tendrán un costo de financiación terminal ${}^{T}P_{t+r-x}$ dx cuando se retiren r-x años después. A medida que estos miembros pasan a tener edades entre y e y+dy , $x \leq y < r$, $e^{-\delta(r-x)t}\,{}^{T}P_{t+r-x}$ dx m(y) dy, deberá ser vertido.

El valor presente de este costo normal es $e^{-\delta(r-x)t}\,{}^{T}P_{t+r-x}$ dx m(y) dy y el valor presente actuarial de los futuros costos normales denotado por $(Pa)_t$ para todos los miembros activos es

$$(Pa)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x} \int_x^r m(y)\,dy\,dx =$$

$$= e^{\tau t} f w(r) s(r) \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)} n(t-x+a)\left[1-M(x)\right]dx$$

Utilizando las relaciones vistas, se llega a que el pasivo actuarial en el tiempo t para miembros activos es igual a la diferencia del vpa de las futuras jubilaciones para los miembros activos menos el vpa de los costos normales futuros.

V) Métodos de costo actuarial individual.

El método general de costo actuarial definido por la función de acumulación M(x) o su derivada, la función de densidad de acumulación, es un método de costo individual en el sentido que m(x) o M(x) pueden ser aplicadas individualmente para obtener la tasa de costo normal y el pasivo actuarial acumulado para cada individuo. Los importes totales de dichos conceptos pueden ser determinados sumando los importes individuales.

Las funciones del fondo de jubilación individual, para obtener una renta que comienza a la edad r con un beneficio inicial de 1 para un activo de edad x, $a \leq x \leq r$ están dadas por:

El vpa de los beneficios está dado por: $(aA)(x) = e^{-\delta(r-x)} \dfrac{s(r)}{s(x)} \bar{a}_r^h$

La tasa de costo normal está dada por P(x)=(aA)(x)m(x)

El pasivo actuarial acumulado está dado por (aV)(x)=(aA)(x)M(x)

El vpa de los futuros costos normales está definido por:

(Pa)(x)=(aA)(x)-(aV)(x)=(aA)(x)[1-M(x)]

Entre los métodos de costo actuarial individual se encuentran los métodos de acumulación de beneficios También se pueden utilizar los métodos de costo actuarial según edad al ingreso, donde el beneficio proyectado es financiado por una contribución nivelada fijada al inicio o una proporción nivelada del salario. En todos estos casos, se determina m(x) tal que se cumple con el objetivo fijado.

VI) Métodos de costo actuarial colectivos.

En estos casos estudiamos métodos de costo colectivos para los cuales las contribuciones son determinadas sobre una base grupal y no como la suma de contribuciones para participantes individuales. Para ello necesitamos definir tres funciones adicionales:

- $(aF)_t$ es el fondo asignado a los miembros activos en el tiempo t.
- $(aC)_t$ es la tasa de contribución anual en el tiempo t en relación a los participantes activos
- $(aU)_t$ es el pasivo actuarial acumulado no fondeado correspondiente a los participantes activos en el tiempo t

Entonces $(aU)_t=(aV)_t-(aF)_t$

El fondo de los miembros activos en el tiempo t puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(aF)_t=(aC)_t+\delta(aF)_t-{}^{T}P_t$$

con un valor inicial de $(aF)_0$. El lado derecho de la ecuación indica las dos fuentes de ingresos al fondo y la fuente de salida asociada a la transferencia de la financiación terminal a un fondo para miembros jubilados.

En relación a un método de costo actuarial ,tal como lo determina una función de acumulación que implica una tasa de costo normal P_t y el pasivo acumulado que resta considerar de los miembros activos $(aU)_t$, una forma natural de tasa de contribución es

$$(aC)_t=P_t+\lambda(t)(aU)_t$$

Donde λ(t) define el proceso de amortizar $(aU)_t$

Esta última ecuación destaca una característica de los métodos de costo actuariales colectivos aun no formulada. Estos modelos definen una tasa de contribución $(aC)_t$ que depende del nivel de financiamiento , esto es de la magnitud de$(aU)_t$ en estos casos los ajustes requeridos por cambios del plan o por ganancias o pérdidas, puede ser hecho automáticamente siguiendo el método de costo actuarial dado que el valor de $(aU)_t$ reflejará tales cambios y ganancias y pérdidas.

Consideremos un posible proceso de amortización en el cual

$$\lambda(t)=\frac{1}{\bar{a}_{P_t}} \quad \text{donde } \bar{a}_{P_t}=\frac{(Pa)_t}{P_t}$$

Donde este ultimo concepto es el valor de una renta temporaria de \$ 1 tal que esta renta temporaria con una tasa de ingreso nivelado a la tasa corriente de costo normal , P_t iguala el vpa de los costos normales futuros de los miembros activos actuales ,$(Pa)_t$. Para la elección que se ha hecho de λ(t) y haciendo cuentas se llega a que

$$(aC)_t=\frac{(aA)_t-(aF)_t}{\bar{a}_{P_t}}$$

La fórmula que caracteriza el progreso del fondo , se transforma para λ(t)

$$\frac{d}{dt}(aU)_t=-\frac{(aU)_t}{\bar{a}_{P_t}}+\delta(aU)_t$$

Dado que $\bar{a}_{pu}$ es menor que V(0,∞,δ)=1/ δ y por lo tanto que $1/\bar{a}_{pu}-\delta\geq\varepsilon>0$

$$\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}}-\delta\right)du\right]\to 0 \quad \text{cuando t } \to\infty$$

y por lo tanto $(aF)_t$ tiende a $(aV)_t$

Aquí el método de costo colectivo con $\lambda(t)=1/\bar{a}_{pt}$ es asintóticamente equivalente al método de costo individual definido por la función de acumulación usada para evaluar $(aV)_t$ y P_t . Hay muchas funciones de acumulación que producen funciones tales que $(Pa)_t/P_t$ es lo suficientemente pequeño como para asegurar la convergencia de $(aF)_t$ a $(aV)_t$ .Cada una de estas funciones de acumulación pueden producir un esquema diferente de contribuciones y un fondo final diferente.

Para ser completamente especifico, siempre indique la función de acumulación usada. El método colectivo con acumulación por edad de entrada es particularmente importante en la practica

VII) Funciones básicas para miembros activos y jubilados combinados

En nuestro desarrollo previo se consideraron las funciones básicas para los activos y los pasivos en forma separada, lo que era útil para ciertos propósitos Sin embargo para otros propósitos es útil considerar las funciones básicas combinadas del grupo de miembros activos y jubilados.

Funciones	Activos	Jubilados	Combinados
Vpa en el tiempo t de las futuras jubilaciones	**$(aA)_t$**	**$(rA)_t$**	**$A_{t} = (aA)_t + (rA)_t$**
Tasa de costo normal	**P_t**	**0**	**P_t**
Pasivo actuarial acumulado	**$(aV)_t$**	**$(rV)_t$**	**$V_{t} = (aV)_t + (rV)_t$**
Vpa de costo normales futuros	**$(Pa)_t$**	**0**	**$(Pa)_t$**

Podemos usar las ecuaciones de asignación de ingresos a miembros activos y jubilados para obtener tal ecuación para el grupo combinado .Así

$$P_t + \delta V_t = B_t + \frac{d}{dt} V_t$$

En esta ecuación el costo normal y el ingreso por intereses al fondo se asignan al pago de beneficio de jubilación y a cambios en el pasivo actuarial acumulado.

Para obtener fórmulas para el grupo combinado en el caso de financiación colectiva si suponemos que los miembros jubilados están totalmente financiados entonces $U_t = (aU)_t$.

Más aún dado que no se requieren contribuciones de los miembros jubilados la tasa de contribución $C_t = (aC)_t$ .En este caso $C_t = P_t + \lambda(t) U_t$. Si $\lambda(t) = 1/\bar{a}_{Pt}$ entonces

$$C_t = \frac{A_t - F_t}{\bar{a}_{P_t}}$$

Entonces cuando $(rF)_t = (rV)_t$ los resultados del método de costo colectivo definido para los miembros activos en el tiempo t son equivalentes a los resultados definidos para todos los miembros .

BIBLIOGRAFÍA

[1] Owadally, M.I (2003), Astin Bulletin, vol. 33,Nº2, 2003, pp 289-312, “Pension funding and the actuarial assumption concerning investment returns”

[2] American Academy of Actuaries, Issue Brief, July 2012, “The 80% pension funding standard myth”

[3] Society of Actuaries, 2014, “Stretching the corridor, the effects of extended rate stabilization on defined benefits plan funding requirements”

[4] Bowers Jr.,N.L. Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A, Nesbitt C.J , 1997, Society of actuaries, “Actuarial Mathematics”

[5] Society of Actuaries, 2014, “Communicating the Financial Health of Public Pension plans”