

Intervalos de confianza para el ciclo del PIB Uruguayo

Ignacio Alvarez
Natalia da Silva

Julio 2009

Serie documentos de trabajo
DT (09/01)

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA EL CICLO DEL PIB URUGUAYO

*Ignacio Alvarez, Natalia da Silva**

nachalca@gmail.com

Palabras clave: bootstrap, máxima entropía, intervalos de confianza, ciclo del PIB

Resumen

La estimación del componente cíclico y la tendencia del producto son de suma importancia para el estudio de la dinámica en la producción agregada. En el sentido que brinda información sobre si dicha dinámica responde a factores de corto o de largo plazo.

Tener una medición del componente cíclico (utilizado como brecha de producto) es útil para la definición de políticas monetarias. Por otro lado el producto potencial permite aislar el efecto del ciclo sobre las cuentas fiscales y así identificar el resultado fiscal estructural.

En este trabajo se construyen intervalos de confianza para el ciclo estimado. Se estima el ciclo mediante el filtro propuesto por Christiano y Fitzgerald, y posteriormente se estimarán los intervalos de confianza a través de la aplicación de dos técnicas de remuestreo (bootstrap) para series temporales.

Se estudia la dinámica reciente del producto uruguayo en base a la descomposición en ciclo y tendencia así como el intervalo de confianza estimado para el ciclo. Se observa una marcada desaceleración del crecimiento en 2009 que no llegará a constituirse en una recesión. Esta desaceleración afecta principalmente al componente de corto y mediano plazo mientras que el componente tendencial todavía mantiene cierto dinamismo.

*Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Administración, Uruguay

1. Introducción

El estudio del ciclo económico es relevante tanto desde una perspectiva teórica, así como para evaluar los efectos de las políticas macroeconómicas a través del estudio de los patrones de crecimiento de la economía, permite distinguir los efectos estructurales de aquellos cambios relativos a la coyuntura. En tal sentido, cuando se pretende estudiar la evolución de largo plazo de algún fenómeno económico se debe tomar en cuenta el componente cíclico para no distorsionar el análisis con efectos de corto plazo. A su vez cuando el análisis se centra en el estudio de la coyuntura económica el componente cíclico describe las oscilaciones de corto y mediano plazo.

En el estudio de brecha de producto, entendida como componente cíclico del PBI, es fundamental determinar si la misma es o no distinta a la tendencia. En términos estadísticos esto significa determinar si el ciclo estimado es significativamente distinto de cero. Una herramienta útil para responder la pregunta antes planteada es la construcción de intervalos de confianza.

El objetivo de este trabajo es construir intervalos de confianza para el ciclo estimado. En primer lugar se estimará el ciclo mediante el filtro propuesto por Christiano y Fitzgerald (1999), y posteriormente se estimarán los intervalos de confianza a través de la aplicación de dos técnicas de remuestreo para series temporales. La utilización del remuestreo para la construcción de los intervalos se justifica debido a que el filtro usado para la estimación del ciclo no supone ningún modelo de probabilidad para el mismo.

Las técnicas de remuestreo han cobrado relevancia en las últimas décadas, por haber sido efectivas en casi todas las áreas de la estadística. Sin embargo cuando los datos con los que se trabaja son dependientes, el remuestreo tradicional no arroja buenos resultados debido que destruye dicha dependencia. Existen varias formas de adaptar estas técnicas en el caso de series temporales, que permitieron extender su aplicación hasta los datos dependientes pero estacionarios.

El remuestreo basado en bloques es la familia de técnicas más utilizada en el contexto de datos dependientes, sin embargo en este trabajo no es posible su aplicación ya que las series que se estudian no son estacionarias, presentan raíces unitarias y estacionalidad, se utiliza entonces el remuestreo basado en modelos ARIMA y el remuestreo basado en máxima entropía propuesto por H.D. Vinod (2003).

La estructura del documento es como sigue. En el resto de la sección 1 se comentan las definiciones básicas, los objetivos y antecedentes del trabajo. Luego en la sección 2 se presenta una breve descripción de las técnicas de remuestreo aplicadas a series temporales y el filtro lineal utilizado, en la sección 3 se muestra la estrategia utilizada para la estimación de intervalos de confianza basados en técnicas de bootstrap, en la sección 4 se muestran los principales resultados y finalmente en la sección 5 representa una síntesis del documento.

1.1. Extracción de Señales y Brecha de Producto

Como se señala en Espasa y Cancelo [1993], en el análisis económico, en particular cuando se analizan variables macroeconómicas, no necesariamente se realiza sobre los datos originales ya que los mismos contienen oscilaciones que no son de interés y pueden distorsionar la interpretación de los resultados.

Las series de tiempo pueden desagregarse en distintos componentes, y según el objetivo del análisis, algunos de estos componentes serán de interés y otros no. Estos componentes no son directamente observables, por lo que deben ser estimados.

El problema de extraer un componente de interés a partir de datos observados es conocido como *Extracción de Señales* y se le llama “señal” a dicho componente.

En el contexto de la extracción de señales, una serie de tiempo se piensa como la agregación de un conjunto de señales ortogonales que son inobservables. Es decir, el proceso estocástico $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ puede ser descompuesto en cuatro componentes: la tendencia, el ciclo, la estación y por último el componente irregular. La relación entre $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ y sus componentes puede ser de distintas maneras: las dos más comunes son la aditiva y la multiplicativa.

$$\begin{array}{ll} \textit{Aditiva} & Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t \\ \textit{Multiplicativa} & Y_t = T_t C_t S_t I_t \end{array}$$

Siguiendo a Espasa y Cancelo [1993], los componentes de la serie pueden definirse de la siguiente manera:

- **Tendencia:** T_t Es el componente asociado a las oscilaciones de baja frecuencia representando los movimientos de largo plazo o estructurales del fenómeno estudiado.
- **Ciclo:** C_t Es un componente de tipo oscilante que se caracteriza por ser un movimiento recurrente en torno a la tendencia que se repiten cada varios años, aunque no necesariamente de forma periódica. Recoge las fluctuaciones de mediano plazo de la serie, aunque existen distintas definiciones de este componente, que lo vinculan con períodos que son mayores a las del componente estacional y menores a los de la tendencia.
- **Estación:** S_t El componente estacional, es el asociado al comportamiento regular de la serie en las frecuencias correspondientes a períodos inferiores al año, es decir que recoge las características regulares de corto plazo de la serie.
- **Irregular:** I_t Tiene una estructura aleatoria y contiene oscilaciones no sistemáticas. Es el asociado a las frecuencias más altas y recoge los comportamientos inesperados del proceso a analizar.

Esta descomposición, permite realizar un mejor análisis de los fenómenos económicos, al brindar al analista una herramienta para aislar las diferentes causas en la variabilidad de una serie. Por ejemplo, una descomposición de este tipo permite observar el estado de una economía, reconociendo tanto los efectos estacionales como el punto en el ciclo en donde se encuentra en un momento determinado.

En este trabajo la señal de interés es el componente cíclico del PIB, que tiene varias aplicaciones en el análisis económico. Una de las aplicaciones más importantes es que puede asociarse con la brecha de producto de la economía.

Changny y Döpke presentan en [2001] una discusión sobre la definición de la brecha de producto. La diferencia entre el PIB observado de la economía y su nivel "potencial" de largo plazo es conocida como la brecha de producto. Dicho nivel potencial puede definirse de distintas maneras. En su formulación original, Okun define el producto potencial como el nivel de producción que puede alcanzarse en una situación de pleno empleo. En las últimas décadas este concepto se ha ido modificando y se asocia el producto potencial con el mayor nivel de producto que la economía puede alcanzar sin generar presión inflacionaria.

En este trabajo, la brecha de producto se asocia con las fluctuaciones de corto o mediano plazo de la serie de IVFPIB, y por esta razón es estimada a través del componente cíclico del IVFPIB, que se constituye en la principal señal de interés a lo largo del trabajo.

Existen muchas metodologías para calcular el producto potencial¹ y la brecha de producto de un país, no obstante, en este trabajo se utiliza únicamente un método no estructural univariado; el filtro Christiano - Fitzgerald propuesto en [1999].

¹En Changny y Döpke se clasifican en Estructurales, No Estructurales, y Directos

1.2. Objetivos

Como se mencionó anteriormente, el componente cíclico del producto es inobservable. Esto permite que coexistan muchas maneras distintas para estimarlo, sin que sea claro cuál de ellas es la más adecuada. No es posible realizar un test de ajuste para las distintas estimaciones del ciclo ya que no existen datos en la realidad con los cuales contrastar.

Teniendo en cuenta la utilidad del ciclo para evaluar y diseñar las políticas económicas, es necesario tener criterios que permitan evaluar la precisión de dicha estimación y hacerlo comparable con otras estimaciones del mismo.

En este sentido, los objetivos generales del trabajo son:

1. **Estudiar la dinámica reciente del PIB Uruguayo** y su evolución en el futuro inmediato.
2. **Extraer la señal cíclica del PIB uruguayo entre 1975-2009**, a nivel agregado. Para lo cual se utiliza el filtro lineal de Christiano Fitzgerald.
3. **Estimar intervalos de confianza para el componente cíclico del IVFPIB a través de técnicas de remuestreo en series temporales.**

1.3. Antecedentes

Este trabajo tiene como principal antecedente el trabajo final realizado por Alvarez y da Silva, para obtener el grado de Lic. en Estadística [2008], donde se aplican varias técnicas univariadas para estimar el ciclo del IVFPIB de la economía uruguaya, desde un enfoque del dominio de las frecuencias, además se presenta una primera aproximación en la estimación de intervalos de confianza para el ciclo uruguayo. En este trabajo se puede encontrar mayor profundización de los conceptos utilizados en este documento, y otras herramientas complementarias para la extracción de señales.

En Gallego y Johnson [2001] se construyen intervalos de confianza para el crecimiento del PIB de tendencia y el componente cíclico para los países del G7, las estimaciones son obtenidas con el filtro Hodrick-Prescott y el filtro Christiano Fitzgerald. Los intervalos de confianza se obtienen mediante técnicas de bootstrap en bloques para datos dependientes.

2. Aspectos Teóricos

En esta sección se presentan muy brevemente las herramientas que se utilizan para la estimación del ciclo y la construcción de intervalos de confianza. Se describe las técnicas de remuestreo utilizadas en el caso que los datos muestren dependencia temporal, y el filtro diseñado por Christiano y Fitzgerald utilizado para estimar el ciclo del PIB uruguayo.

2.1. El remuestreo de datos dependientes

A partir de los trabajos de Efron en 1979 se definen las bases conceptuales que sustentan las técnicas estadísticas basadas en simulaciones. En el anexo se presenta una descripción más detallada de estas técnicas. Este tipo de aplicaciones se desarrolla en contexto en que las observaciones provienen de la misma distribución de probabilidades y son independientes entre si, esto es:

- Y_1, Y_2, \dots, Y_n iid con $Y_1 \sim F$
- θ es el parámetro de interés
- T es un estadístico utilizado para estimar θ

La idea básica del bootstrap no paramétrico es que en ausencia de otra información sobre la población, la *distribución empírica* de la muestra aleatoria es la mejor guía para determinar la distribución de la población; por lo tanto, remuestrear la muestra con reemplazamiento nos aproxima a lo que sucedería si se remuestrea la población.

En esta situación el problema consiste en estudiar las propiedades de la distribución del estadístico T , para lo cual hay dos grandes caminos, modelización paramétrica o no paramétrica.

Las aproximaciones se obtienen a partir de simular el conjunto de datos, una simulación de los datos consiste en $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$ donde cada $Y_i^* \sim \hat{F}$ y son independientes entre si. Entonces se simulan R conjuntos de datos distintos y en cada uno de ellos se calcula $T^* = T(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ obteniéndose una secuencia T_1^*, \dots, T_R^* que provienen de la distribución de T/\hat{F} .

Si los datos tienen una estructura de dependencia, el esquema anterior no puede ser aplicado. En este trabajo se utilizan dos técnicas de remuestreo para el caso de datos dependientes, remuestreo basado en modelos y remuestreo basado en máxima entropía.

Remuestreo Basado en Modelos

Esta metodología consiste en ajustar un modelo ARIMA $Y_t = \psi(L)\epsilon_t$ a los datos, obtener los residuos del modelo ajustado $\hat{\epsilon}_t = (\hat{\psi}(L))^{-1}Y_t$ y con ellos generar una nueva serie. Para ello se sortea una muestra aleatoria simple con reposición de $\hat{\epsilon}_t$, y a partir de esa muestra se obtiene una réplica de la serie original. Esta es la forma más directa de obtener un conjunto de variables independientes e idénticamente distribuidas en donde se puede aplicar la técnica tradicional de bootstrap.

La principal ventaja de este método es que se le puede aplicar a cualquier serie que sea modelable con un ARIMA. Esta metodología arroja buenos resultados cuando el proceso generador de los datos es el modelo ARIMA utilizado para construir las réplicas. Los problemas de este método surgen cuando el modelo ARIMA no es correcto ó cuando las réplicas del modelo no son estacionarias.

Remuestreo Basado en Máxima Entropía

Esta técnica es presentada en H.D Vinod [2003], la misma se basa en considerar el criterio de máxima entropía para la construcción de las réplicas bootstrap. Este método es útil ya que no se necesita definir un modelo, además de no ser necesario contar con una serie estacionaria para su implementación.

La entropía es definida como la esperanza de la información de Shannon, como sigue:

$$H = E(-\log f(x))$$

Se imponen las condiciones para que $f(x)$ sea una función de densidad y que además maximice H .

Primero se ordenan los datos y se define $z_t = 0,5(x_{(t)} + x_{(t+1)}) \forall t = 1, 2, \dots, T - 1$ que son los puntos intermedios entre dos estadísticos de orden sucesivos. Posteriormente se construyen intervalos de forma tal que cada intervalo contenga a un único estadístico de orden. En este sentido el primer y último intervalo son $I_1 = (-\infty, z_1)$ y $I_T = (z_{T-1}, \infty)$, mientras que los intervalos intermedios se definen como $I_k = (z_{k-1}, z_k) \forall k = 1, 2, \dots, T - 1$.

Los intervalos antes mencionados son importantes, ya que son utilizados para construir la densidad de entropía empírica. Con esto se puede calcular la distribución de máxima entropía a partir de los datos.

Luego se sortean valores provenientes de la distribución de máxima entropía para construir muestras de la muestra ordenada, y finalmente se reordena cada réplica para recuperar el orden original de los datos.

2.2. El Filtro de Christiano y Fitzgerald

Como se mencionó al inicio del trabajo se estimará el ciclo del IVFPIB mediante el filtro univariado de Christiano y Fitzgerald [1999] (CF), en lo que sigue se realizará una breve descripción del mismo. Este filtro puede expresarse como una media móvil finita, valor de la serie filtrada en el momento t se obtiene como sigue:

$$C_t^{cf} = \sum_{j=t-T}^{t-1} \hat{\psi}_j^{cf} Y_t$$

donde Y_t es la serie de entrada de la que se dispone de una muestra de tamaño T , (y_1, y_2, \dots, y_T) . Se puede destacar que a diferencia del filtro Baxter King² el filtro CF utiliza todos los datos de la muestra para estimar C_t^{cf} lo que tiene como consecuencia que el filtro no es simétrico.

Debido a que una cantidad de series macroeconómicas presentan espectros similares al de un paseo aleatorio, los autores utilizan esta función para ponderar cada frecuencia en la derivación del filtro. Los coeficientes del filtro, son los que se derivan de resolver el siguiente problema de optimización donde se incorpora como ponderación de cada frecuencia, el pseudo-espectro de un paseo aleatorio.

$$\begin{aligned} \text{Min } Q_\psi &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Psi(e^{iw}) - \hat{\Psi}_t(e^{iw}) \right|^2 f(w) dw & (1) \\ \text{donde } f(w) &= \frac{1}{2(1 - \cos(w))} \end{aligned}$$

La función $f(w)$ es decreciente en w y tiende a infinito cuando $w \rightarrow 0$, así se le otorga mayor peso a las frecuencias bajas.³ Resolviendo el problema de minimización anterior se obtienen los coeficientes $\hat{\psi}_j^{cf}$, y su expresión es la siguiente:

$$\hat{\psi}_j^{cf} = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{k=0}^{j-1} \psi_k & \text{para } j = t - 1 \\ \psi_j & \text{para } j = t - 2, \dots, T - t - 1 \\ \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{k=j+1}^0 \psi_k & \text{para } j = T - t \end{cases} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la manera en que se obtienen los valores de la serie filtrada y la forma de los coeficientes, se puede observar que cada dato es obtenido con un conjunto de coeficientes diferente a los demás. Esto quiere decir que la función de ganancia depende de la posición que ocupe el dato, por lo que cada dato tiene asociada una función de ganancia distinta. En Iacobucci [2005] se muestra la representación gráfica en tres dimensiones de esta función y allí se puede ver que en algunas posiciones, el filtro deja pasar las frecuencias estacionales.

En CF no hay una restricción que asegure que la serie de salida sea estacionaria, por lo cual en caso que la serie original presente una raíz unitaria, la tendencia deberá ser tratada antes de aplicar el filtro.

²Otro filtro de tipo pasa-banda desarrollado Baxter King [1995]

³En particular $f(w) \leq 1$ cuando $w \geq \arccos(1/2) \approx 1,05$ que equivale a períodos menores a seis trimestres

3. Intervalos de confianza Bootstrap

En esta sección se realizará una breve descripción de los principales métodos para calcular intervalos de confianza y se detalla la estrategia elegida para la construcción de los intervalos para el ciclo estimado del IVFPIB del Uruguay.

3.1. Métodos para el cálculo

Existen muchos métodos para calcular intervalos de confianza de un parámetro θ mediante el bootstrap, los más frecuentemente usados son *Método estandar* y el *Método de percentil*. Dentro de cada uno de estos existen varias posibilidades, en el caso del método percentil es muy corriente realizar una corrección por sesgo.

Los intervalos de confianza se calculan en un contexto de datos iid y en el que se aplican técnicas de remuestreo general, como en A.1. Los datos observados son Y_1, Y_2, \dots, Y_n iid con $Y_1 \sim F$, y θ es el parámetro que se desea estimar. Luego T es un estadístico utilizado para estimar θ , t es el valor del estadístico en la muestra observada y t^* son los valores que adopta T cuando se evalúa en la réplica bootstrap de la muestra $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$.

Método estandar:

El método más sencillo para obtener intervalos de confianza bootstrap es el estandar. Asumiendo que la distribución del estadístico T es aproximadamente normal, el intervalo de confianza al $(1 - \alpha)100\%$ para θ es: $[t - z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_T^* ; t + z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_T^*]$

El remuestreo interviene en la estimación del desvío estándar del estimador $\hat{\sigma}_T^*$ que se obtiene mediante la ecuación (4)

Para poder aplicar este método es necesario que T sea aproximadamente normal e insesgado para θ y por último que el remuestreo basado en bootstratrap nos brinde una buena aproximación de σ_T .

Cuando T no se distribuye normal existen otros métodos para estimar los límites de confianza que se basan en su propia distribución de frecuencias.

Método de percentil:

En este método, el remuestreo se utiliza para obtener una estimación de la distribución de T . Para esto se obtienen R réplicas bootstrap de los datos y en cada una se calcula t^* , luego la distribución de T se estima con $F^*(x) = \frac{1}{R} \sum I_{t_i^* \leq x}$. Posteriormente para calcular el intervalo de confianza para θ al $100(1 - \alpha)\%$ se calculan los percentiles $t_{(R\frac{\alpha}{2})}^*$ y $t_{(R\frac{1-\alpha}{2})}^*$, con lo que el intervalo queda como $[t_{(R\frac{\alpha}{2})}^* ; t_{(R\frac{1-\alpha}{2})}^*]$.

donde $t_{(h)}^*$ representa el estadístico de orden h de las réplicas t^* . En ocasiones el método de percentil tiene resultados ineficientes, debido a esto es frecuente corregir el cálculo de los intervalos de confianza obtenidos mediante percentiles.

La manera más directa de corregir el intervalo es reemplazar los percentiles T (estimados mediante remuestreo) por los percentiles de los valores “estudentizados” $\hat{t}^* = \frac{t^* - t}{\hat{\sigma}_T^*}$. Entonces el intervalo queda definido como $[\hat{t}_{(R\frac{\alpha}{2})}^* \hat{\sigma}_T^* + t ; \hat{t}_{(R\frac{1-\alpha}{2})}^* \hat{\sigma}_T^* + t]$.

3.2. Estrategia de Estimación

En este apartado se describe como se combinan las herramientas comentadas para construir los intervalos de confianza para el ciclo del IVFPIB. A diferencia de los intervalos descritos más arriba, en este caso el objetivo es obtener un rango de valores creíbles para el valor del ciclo estimado en cada momento del tiempo.

El primer paso es obtener un conjunto de réplicas del ciclo estimado. Para esto se construyen R réplicas de la serie original y a cada una de ellas se le aplica el filtro CF para estimar el ciclo. De esta manera, el ciclo estimado es la serie C_1, C_2, \dots, C_T que surge de aplicar el filtro CF a la muestra original Y_1, Y_2, \dots, Y_T y la r -ésima réplica del ciclo es la serie $C_1^r, C_2^r, \dots, C_T^r$ que surge de aplicar el filtro CF a la r -ésima réplica $Y_1^r, Y_2^r, \dots, Y_T^r$.

Para la obtención de $Y_1^r, Y_2^r, \dots, Y_T^r$ se utiliza primero la técnica de remuestreo basada en modelos y luego el remuestreo basado en máxima entropía. La obtención de las réplicas del ciclo se ilustra en el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} \rightarrow \text{Réplicas} \rightarrow \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & \dots & Y_1^R \\ Y_2^1 & Y_2^2 & \dots & Y_2^R \\ \vdots & & & \\ Y_T^1 & Y_T^2 & \dots & Y_T^R \end{pmatrix} \rightarrow \text{Filtro CF} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1^1 & C_1^2 & \dots & C_1^R \\ C_2^1 & C_2^2 & \dots & C_2^R \\ \vdots & & & \\ C_T^1 & C_T^2 & \dots & C_T^R \end{pmatrix}$$

En el esquema anterior se considera la h -ésima fila de la matriz que tiene las réplicas del ciclo para el período h . Esta fila es el conjunto C_h^r , $r = 1, 2, \dots, R$ que son las R réplicas de C_h .

Las observaciones $C_h^1, C_h^2, \dots, C_h^R$ son independientes entre si ya que las réplicas fueron obtenidas de esa forma (aunque dentro de la misma réplica esto no se cumple, es decir C_h^r NO es independiente de C_h^s) y son "idénticamente distribuidas" porque todas fueron obtenidas aplicando el mismo filtro lineal a una serie con las mismas propiedades aleatorias.

En resumen se puede aplicar el método percentil del caso iid para obtener un IC para cada valor del ciclo, donde el estadístico T es el filtro CF, el valor t es la estimación de C_h con los datos originales, los valores t^* son los ciclos estimados en cada réplica C_h^r y el parámetro de interés θ es el valor de la señal cíclica que es inobservable.

Otra opción sería hacer las réplicas directamente sobre el ciclo, pero esta opción no parece adecuada en el sentido que estaríamos aplicando el filtro una única vez, como el objetivo es obtener intervalos de confianza para el ciclo estimado, la estrategia de replicar los datos de IVFPIB y posteriormente aplicar el filtro a cada réplica es más apropiado.

4. Resultados

En esta sección se presentan las estimaciones del trabajo. Se comienza con el modelo ARIMA ajustado a la serie de IVFPIB, este modelo se utiliza como base de las réplicas basadas en modelos. Luego se muestra el ciclo estimado con el filtro CF y se estiman intervalos de confianza para el mismo con dos metodologías. Los intervalos de confianza se obtienen como se explicó en la sección anterior, hay dos versiones de ellos en la medida que se trabaja con dos formas de obtener las réplicas de la serie original.

4.1. Modelo ARIMA

Los datos utilizados consisten en la serie trimestral de Índice de Volumen Físico del Producto Bruto Interno (IVFPIB) entre el primer trimestre del año 1975 y el primer trimestre del año 2009. El último dato disponible 2009.1 representa un crecimiento del 2.3% del PBI respecto a igual período del año anterior.

Se probaron distintos modelos alternativos, la identificación automática de datos atípicos detecta el último dato disponible como outlier aditivo. Esto quiere decir que la identificación automática no incorpora el último dato en el modelo como una característica de la serie, por lo que no incorpora la disminución en el crecimiento del producto. Es por esto que se excluye en la detección de atípicos al último dato.

El modelo finalmente seleccionado para el IVFPIB es un $ARIMA - AI(0, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ en niveles, con tres valores atípicos, un aditivo en 1982.3, un cambio transitorio en 1995.3 y un cambio de nivel a partir de 2002.3.

Este modelo predice un crecimiento promedio para el año 2009 de 0,64%, es decir una desaceleración marcada del crecimiento respecto a los últimos años, lo que obedece al notorio cambio en el contexto internacional que enfrenta la economía uruguaya durante este año. Según estimaciones de CEPAL el producto de América Latina y el Caribe se contraería en 1.9% durante 2009, con una fuerte desaceleración para todos los países de la región y caída en varias de las economías más importantes como México, Brasil y Chile. Esto relativiza la baja tasa de crecimiento uruguayo ya que el país atravesaría este contexto de crisis sin mostrar una tasa negativa de crecimiento.

En el cuadro 1 se muestra el crecimiento estimado de cada trimestre del año 2009 respecto a igual trimestre del año anterior, así como el promedio anual 2009 respecto al 2008 de la serie de IVFPIB y los límites del intervalo al 95% de confianza. En tanto, para la serie desestacionalizada se presenta el crecimiento respecto al trimestre anterior.

Cuadro 1: Crecimiento estimado en 2009

	IVFPIB	Inf	Sup	SA
Trim I	2.34 %	2.34 %	2.34 %	-2.43 %
Trim II	-0.27 %	-3.64 %	3.10 %	0.96 %
Trim III	0.18 %	-4.46 %	4.82 %	0.86 %
Trim IV	0.41 %	-4.85 %	5.67 %	0.85 %
2009	0.64 %	-2.77 %	4.05 %	0.76 %

Los resultados muestran, en relación a la serie de IVFPIB que se estima una caída para el segundo trimestre del año 2009 seguida de tasas de crecimiento positivas pero cercanas a cero. Sin embargo este resultado no es igual en el caso de la serie desestacionalizada, donde la tasa de crecimiento es negativa en el primer trimestre del año 2009 y positiva en el resto del año.

La diferencia en el signo de la variación del IVFPIB y la serie desestacionalizada en los dos primeros trimestres puede estar explicado, al menos parcialmente, por el efecto de la semana de turismo. En el año 2008 la semana de turismo perteneció al primer trimestre, mientras que en el año 2009 la misma perteneció al mes de abril (segundo trimestre). El primer trimestre del año 2008 es menor que el de este año debido a que contiene la semana de turismo entera, cuando se quita dicho efecto se muestra una caída.

Por otro lado, con estas estimaciones se observa que el país no entraría en recesión durante 2009 ya que ni la serie desestacionalizada ni el IVFPIB acumulan dos trimestres seguidos con caídas.

Se estima el modelo antes explicitado utilizando la serie del IVFPIB desde 1975.1 a 2009.1. El modelo se puede representar como sigue:

$$(1 - L)(1 - L^4)y_t = (1 - \theta L^4)\epsilon_t + \alpha_1 AO_{1982,3} + \alpha_2 LS_{2002,3} + \alpha_3 TC_{1995,3} + \alpha_4 Tur_t$$

Donde $y_t = IVFPIB$, Tur_t es el regresor para el efecto de la semana de turismo, mientras que el resto de los regresores representan la modelización de los valores atípicos identificados⁴.

4.2. Ciclo Estimado

En la figura 1 muestra el ciclo estimado con el filtro CF aplicado sobre los datos de IVFPIB. El ciclo recoge, en términos generales, la evolución de la economía Uruguaya en los últimos treinta años. Se pueden observar los períodos de crecimiento de la segunda mitad de la década del setenta, así como el crecimiento de los años noventa. Por otro lado también se evidencian las crisis económicas de 1982 y 2002, así como el impacto del efecto tequila en la mitad de la década del noventa. Si se comparan ambas crisis, se puede ver que la crisis del 2002 es más profunda que la del 82. Además la crisis del 2002 tiene una salida rápida mientras que la del 82 perdura más en el tiempo.

En la tabla 2 se presentan las principales estadísticas de resumen del ciclo obtenido. La media absoluta de los valores estimados es 2.6 puntos del índice de volumen físico, luego la media inferior y superior indican que el ciclo del IVFPIB es mayor cuando es negativo que cuando es positivo.

La suma de todos los valores del ciclo a lo largo del período permite tener una descripción de la simetría del mismo, este indicador muestra que los valores del ciclo casi se compensan aunque los valores positivos son algo mayores. Esto indica que el ciclo estimado presenta una leve asimetría positiva. Otro aspecto que se puede ver en la tabla 2 son los valores máximos y mínimos del ciclo, así como el momento en el que suceden. El segundo trimestre de 1981 es donde se da el máximo valor del ciclo y en el primer trimestre del año 2003 es mínimo.

Cuadro 2: Medidas descriptivas del ciclo

Medidas	Valores
Med. Abs.	2.65
Med. Sup.	2.57
Med. Inf.	-2.74
Val. Max.	7.49
Fecha Max.	1981.2
Val. Min	-9.32
Fecha Min.	2003
Suma	1.23
Desvío	3.29

Otra manera de estudiar las propiedades de los ciclos es a través del espectro poblacional. El estudio de los mismos permite visualizar dos aspectos fundamentales en el análisis de los filtros. En primer lugar permite

⁴Los coeficientes estimados son: $\alpha_1 = -5,7988$, $\alpha_2 = -5,28$, $\alpha_3 = -7,10$, y $\alpha_4 = -0,1958$

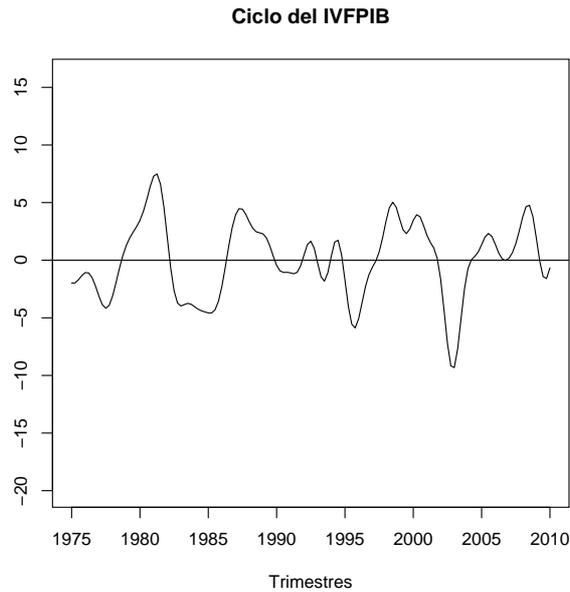


Figura 1: Ciclo estimado con CF

ver, dentro del rango de frecuencia de interés, cuales son las más relevantes en la economía Uruguaya a través del pico más grande del espectro. En segundo lugar da una idea de la pureza del componente cíclico, la que se puede medir a través de la proporción de varianza explicada por las frecuencias consideradas en el ciclo⁵.

El espectro del ciclo fue calculado utilizando el método paramétrico de aproximación con polinomios autoregresivos, la frecuencia que tienen mayor peso en la variabilidad del mismo corresponde a un período de 25 trimestres, el mismo se muestra en el gráfico 2. Esta es la duración del ciclo más importante de la economía uruguaya según esta estimación.

Respecto de la coyuntura el gráfico 1 muestra, para 2009, una secuencia de sucesivas estimaciones con valores negativos para el ciclo. Esto no ocurre desde la racha de valores negativos que culminó en el primer trimestre de 2004. El comportamiento de la señal cíclica es consistente con la desaceleración de la economía comentada previamente, sin embargo Rodríguez, et al [2008] recomiendan que para interpretar mejor la información sobre el ciclo se puede observar el crecimiento de la señal de tendencia.

El cuadro 3 muestra los valores estimados del ciclo para 2008 y 2009, estos se acompañan de la tasa de crecimiento a un paso de la tendencia estimada. Se observa que durante 2008 el ciclo del producto fue elevado (por encima de su media histórica) acompañado de un crecimiento tendencial entre 1 % y 1.59 %, mientras que en este año el ciclo presenta una disminución siendo negativo desde el segundo trimestre de 2009 pero la tendencia continúa mostrando un crecimiento similar al del año 2008.

La metodología utilizada en este trabajo asocia la desaceleración de la economía al componente cíclico manteniendo relativamente estable la evolución de la señal de tendencia. Esto indica que dicha desaceleración responde a fenómenos de corto plazo y no compromete la dinámica de largo plazo del producto uruguayo.

⁵En Alvarez, da Silva (2008) se realiza un estudio más detallado de como utilizar las herramientas espectrales para comparar distintos ciclos estimados

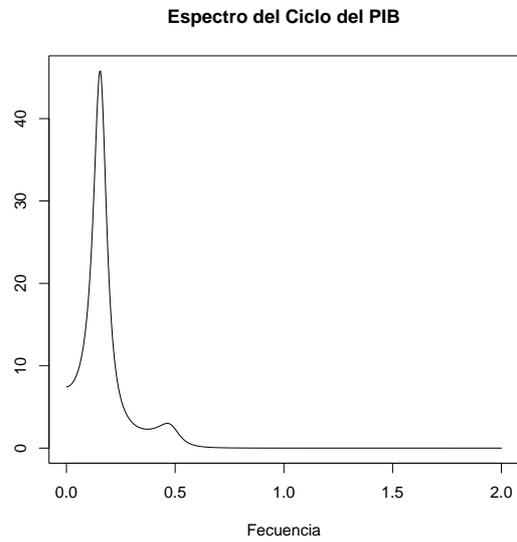


Figura 2: Espectro estimado del Ciclo

Cuadro 3: Ciclo y crecimiento de la Tendencia estimados

Trimestre	Ciclo	Var. Tend.
2008.00	3.73	1.59
2008.25	4.65	1.31
2008.50	4.76	1.07
2008.75	3.80	1.06
2009.00	1.96	1.27
2009.25	-0.06	1.49
2009.50	-1.42	1.43
2009.75	-1.59	1.01

4.3. Intervalos de Confianza

En los puntos anteriores se estudiaron las proyecciones para el IVFPIB y las estimaciones de los componentes de ciclo y tendencia. Ahora se pasa a mostrar los resultados de intervalos de confianza para la señal cíclica, lo que constituye el principal objetivo del presente trabajo.

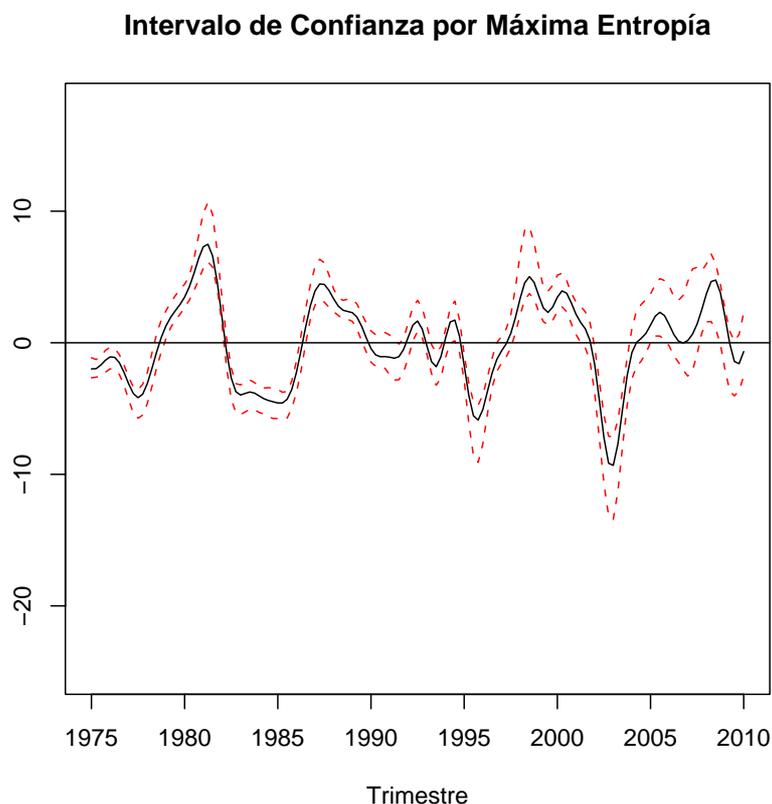


Figura 3: Intervalo de confianza basado en máxima entropía

La principal utilidad del intervalo de confianza para el ciclo es poder responder si dicha señal es significativamente distinto de cero. En el apartado anterior se observó que para el año 2009 las estimaciones puntuales del ciclo son negativas desde el segundo trimestre, mostrando una racha de valores por debajo de cero que no sucedía desde la salida de la crisis del 2002.

Lo que se intenta ahora es determinar desde un punto de vista estadístico si las estimaciones de ciclo son significativamente distintas de cero. Esto es, ¿es realmente negativo el ciclo estimado para el 2009?. En lo que sigue se presentan dos estimaciones del intervalo de confianza al 95 % para la señal cíclica, primero se comentan algunas características de dichos intervalos y luego se retoma la discusión sobre la significación de los valores para el 2009.

En las figuras 3 y 4 muestran respectivamente los intervalos estimados con el remuestreo basado en máxima entropía y basado en modelos explicado en las secciones anteriores. Como lo muestran las figuras anteriores los intervalos estimados en este trabajo no parecen presentar las características de los estimados por Gallego y Jhonson.

Intervalo de Confianza basado en modelo ARIMA

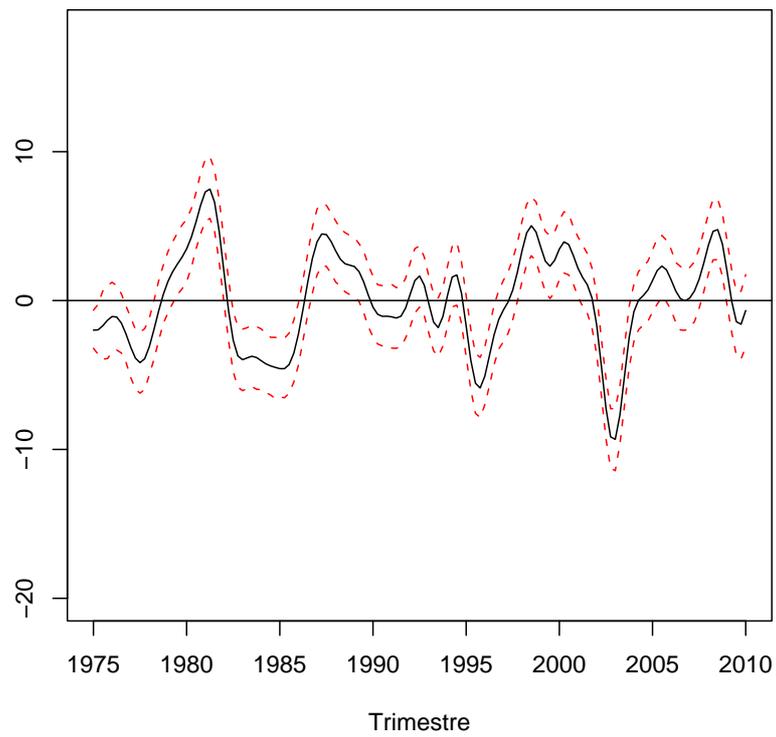


Figura 4: Intervalo de confianza basado en modelo ARIMA

En términos comparativos ambos intervalos tienen una amplitud variable, sin embargo en el caso del intervalo calculado con máxima entropía la tasa de crecimiento de la amplitud es menor que en la estimación basada en modelos. Por otro lado se puede ver que en buena parte del tiempo el ciclo estimado contiene al cero.

Cuadro 4: Amplitud de IC

	Entropía	Modelos
Min.	1.342	2.558
1st Qu.	2.163	3.995
Mediana	2.559	4.049
Media	3.039	4.067
3rd Qu.	4.068	4.134
Max.	7.737	4.896

En relación a la amplitud de los ciclos estimados, es notorio que la misma es sensible a la metodología que se utiliza para hacer las réplicas. Las réplicas basadas en modelos resultan en intervalos de confianza más amplios para el ciclo estimado que aquellas basadas en réplicas obtenidas mediante máxima entropía. La tabla 4 muestra algunas estadísticas de resumen básicas de la amplitud de los intervalos donde se ilustra el comentario anterior.

Vinculado a las diferencias en la amplitud se aprecian variaciones entre los métodos a la hora de estudiar si el ciclo estimado es o no significativo, es decir si el intervalo de confianza estimado contiene o no al cero. Este resultado es interesante de conocer ya que el hecho de que el ciclo del IVFPIB se encuentre por encima de la tendencia, es decir sea significativamente distinto de cero, puede ser un indicio de presión inflacionaria en la economía. Finalmente, los gráficos 3 y 4 muestran que los intervalos de confianza

Cuadro 5: Proporción de Trimestres que $0 \in IC$

Método IC	$0 \in IC$	Prop.encima deT
Entropía	0.29	0.37
Modelos	0.46	0.28

estimados para el ciclo contienen al cero en todos los trimestres de 2009. El cuadro 6 muestra con mayor detalle los valores de ambos intervalos para los dos últimos años del período de estudio. Se observa que no es posible concluir que el ciclo sea negativo durante el 2009, aunque si que el mismo fue positivo durante 2008.

Esto relativiza en alguna medida los comentarios de la sección anterior, ya que no es posible afirmar que el ciclo del IVFPIB es negativo actualmente. De todas formas mirando los valores del cuadro 6 es posible afirmar que el ciclo en 2009 ha disminuido en relación a su valor de 2008, lo que permite mantener el estudio en términos de la desagregación de la dinámica del producto en términos de ciclo y tendencia.

Cuadro 6: Intervalo de Confianza para el Ciclo

Trimestre	Max. Entropía		Modelos	
	Inf	Sup	Inf	Sup
2008.1	1.59	6.00	1.79	5.81
2008.2	1.61	6.75	2.73	6.81
2008.3	1.04	6.01	2.75	6.79
2008.4	-0.11	4.42	1.64	5.81
2009.1	-2.06	2.53	-0.31	4.04
2009.2	-3.65	0.88	-2.14	2.03
2009.3	-4.04	0.12	-3.68	0.62
2009.4	-3.65	0.64	-3.92	0.62

5. Comentarios Finales

El objetivo principal de este trabajo supuso la construcción de un intervalo de confianza para la señal cíclica en todo el período de estudio. Se presentaron dos metodologías para construir dicho intervalos, ambas basadas en técnicas de remuestreo adaptadas a datos dependientes.

Tanto el intervalo basado en modelos ARIMA como el basado en Máxima Entropía, son satisfactorios en el sentido que dan un conjunto de valores entorno a la estimación puntual del ciclo. Esto no es lo que ocurre con el intervalo de confianza construido en Gallego y Johnson[2001] que por otra parte es la única referencia encontrada en la literatura.

Las réplicas basadas en modelos resultan en intervalos de confianza más amplios para el ciclo estimado que aquellas basadas en réplicas obtenidas mediante máxima entropía.

Los intervalos de confianza estimados para el ciclo del IVFPIB contienen al cero en todos los trimestres de 2009, por lo que no es posible concluir que el ciclo sea negativo durante el 2009.

En relación a la dinámica de corto plazo del producto de la economía uruguaya, las estimaciones presentadas muestran al IVFPIB con un crecimiento de 0.64% promedio para el año 2009. Por otro lado el producto no acumulará dos trimestres seguidos con caída en términos desestacionalizados, por lo que no se estima que la economía entre en recesión en el año 2009.

La metodología utilizada en este trabajo asocia la desaceleración de la economía al componente cíclico manteniendo relativamente estable la evolución de la señal de tendencia. Esto indica que dicha desaceleración responde a fenómenos de corto plazo y no compromete la dinámica de largo plazo del producto uruguayo.

Esto surge de la desagregación de la dinámica del IVFPIB en sus señales del ciclo y tendencia. Dicha desagregación muestra que en 2009 los valores del ciclo son menores a los del 2008 mientras que el crecimiento de la tendencia en 2009 se mantiene en valores similares a los del año anterior.

Referencias

- [2008] Alvarez, I., da Silva, N. (2008) - "*Estimación de la Brecha de Producto Mediante Filtros Lineales*". Mimeo. Informe Final de Pasantía. Licenciatura en Estadística. Facultad de Ciencias Económicas y Administración. UdelaR.
- [2000] BCU (2000)- Cuentas Nacionales. Metodología de las series Revisadas.
- [2003] Badagián, A. (2003) - "*Extracción de señales y estimación de ciclos macroeconómicos en los países del Mercosur: un análisis integrado en el dominio del tiempo y de las frecuencias*". Mimeo. Trabajo Monográfico. Licenciatura de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Administración. UdelaR.
- [1995] Baxter, M.;King, R. (1995) - "*Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*". NBER. Working Paper N° 5022. National Bureau of Economic Research.
- [2001] Bucacos, E. (2001)- "*Tendencia y ciclo en el producto uruguayo*". Revista de Economía. Segunda Época Vol. VIII N°2. Banco Central del Uruguay.
- [2007] Carbajal, F; Lanzilotta, B. Llambí, C. Velázquez.C. (2007) - "*La brecha de producto para Uruguay: metodologías para su estimación y su utilidad para el pronóstico de la inflación*". CINVE . Presentado en las XXII Jornadas Anuales de Economía del Banco Central del Uruguay.
- [2001] Changy, O.; Döpke, J. (2001) "*Measures of Output Gap in the Euro-Zone: an Empirical Assessment of Selected Methods*", Kiel Working Paper N° 1053.
- [1999] Christiano, L.; Fitzgerald, T. (1999) - "*The Band Pass Filter*". NBER. Working Paper N° 7257. National Bureau of Economic Research.
- [2000] Conwey, P. y Frame, D. (2000)- "*A spectral analysis of New Zeland output gaps using Fourier and wavelet techniques*". Reserve Banck of New Zeland.
- [1] [1997] Davison, A. y Hinkley, D. (1997) - "*Bootstraps Methods and their application*". Cambridge University Press.
- [2] [1996] Dossé, J. Y Planas Ch.(1996) - "*Revisión en Seasonal Adjustment Methods: an Empirical Comparison of X-12-ARIMA and SEATS*". Mimeo, Eurostat
- [1993] Espasa, A. y Canelo, J.R. (1993) - "*Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*". Editorial Alianza Economía
- [2006] Everts, M. (2006)- "*Band Pass Filters*" MPRA Paper N° 2049. Munich Personal Re Pec Archive. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/2049/>
- [2000] Fournier, J. (2000)- "*L' approximation du filtre passe-bande proposée par Christiano et Fitzgerald*" Institut National de la Statistique des Études Économiques.
- [2001] Gallego, F y Johnson, Ch. (2001) - "*Teorías y métodos de medición del producto de tendencia: una aplicación al caso de Chile*". Economía Chilena. Vol 4 N°2
- [2000] Gómez, V. y Bengoechea, P. (2000)- "*Estimación del Componente Cíclico de las Series Económicas con Filtros Pasabanda: Una Aplicación a los Indicadores de Clima e Índices de Producción Industrial*". Investigaciones Económicas Ministerio de Economía y Hacienda. Vol. XXIV.
- [1996] Gómez, V. y Maravall, A. (1996) "*TRAMO (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observation, and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series) Introduction for the User*".
- [2001] Harvey, A y Trimbur, M. (2001)- "*General model-based filters for extracting cycles and trends in economic time series*". Cambridge University, Faculty of Economics and Politics.

- [1994] Hamilton, J. (1994)- " *Time Series Analysis*". Princeton University Press.
- [1980] Hodrick,R; Prescott,E. (1980)- " *Post War U.S Business Cycles: An Empirical Investigation*". Carnegie Mellon University, Working Discussion Paper 451.
- [2005] Iacobucci, A. y Noullez, A. (2005)-" *A Frequency Selective Filter for Short-Length Time Series*". CNRS.
- [1999] Kaiser,R y Maravall,A.(1999) - " *Estimation of the business cycle: A modified Hodrick - Prescott filter*". Spanish Economic Review 1.
- [1998] Kamil, H. y Lorenzo, F. (1998)- " *Caracterización de las Fluctuaciones cíclicas en la economía uruguaya*". Revista de Economía, Vol.5, N°1, Segunda Época.
- [2002] Masoller, A. (2002)- " *Un Indicador Sintético de actividad económica*". BCU
- [2002] Miller, S. (2002)-" *Métodos alternativos para la estimación del PIB potencial: Una aplicación para el caso de Perú*" Estudios Económicos BCRP.
- [3] Paparoditis, E. (1996)-" *A Frequency Domain Bootstrap-Based Method for Checking the Fit of a Transfer Function Model*". Journal of the American Statistical Association, Vol 91, N°436.
- [1999] Pedersen, T. (1999) - " *Spectral Analysis, Business Cycles and Filtering of Economic Time Series. A Survey*". Mimeo. Institute of Economics, University of Copenhagen.
- [4] Pizarro, M. (2000) - " *El filtro Baxter-King, metodología y aplicaciones*". Documento de trabajo del Banco Central de Costa Rica. Departamento de Investigaciones Económicas.
- [2004] Ponce,J (2004)- " *Una nota sobre empalme y conciliación de series de cuentas nacionales*". Revista de Economía-Segunda Época Vol. XI N°2
- [1999] Pollock S. (1999)-" *A Handbook of Time Series Analysis, Signal Processing and Dynamics*". London Academic Press
- [2000] Pollock S. (2000)- " *Trend Estimation and De-trending via Rational Square-Wave Filters*". Journal of Econometrics
- [2003] Pollock S. (2003)- " *Improved Frequency-Selective Filters*" Computational Statistics and Data Analysis
- [2006] Pollock S. (2006) -" *Business Cycles in Time and Frequency*". Lectura disponible en <http://webspace.qmul.ac.uk/dsgpollock>
- [2002] Reijer, A. den (2002) - " *International Business Indicators: Measurement and forecasting*". Research Memorandum WO 689, De Nederlandsche Bank.
- [2006] Reijer, A. den (2006) - " *The Dutch business cycle: which indicators should we monitor?*". Research Memorandum , De Nederlandsche Bank.
- [2008] Rodriguez, S.; da Silva, N. y Alvarez,I. (2008)" *Producto Potencial y Brecha de Producto en Uruguay*"
- [2007a] Rodriguez, S.; da Silva, N. y Alvarez,I. (2007)" *Métodos univariados para la estimación de la brecha de producto en Uruguay: Parte I*"
- [2007b] Rodriguez, S.; da Silva, N. y Alvarez,I. (2007)" *Métodos univariados para la estimación de la brecha de producto en Uruguay: Parte II*"
- [2007c] Rodriguez, S.; da Silva, N. y Alvarez,I. (2007)" *Estimación de la brecha de producto sectorial en Uruguay*"

- [2004] Rodríguez, S; Badagián, A. (2004) - "*Dinámicas no lineales y ciclos asimétricos en Argentina, Brasil y Uruguay*". Instituto de Estadística (IESTA). Facultad de Ciencias Económicas y Administración. Udelar.
- [2005] Ruth, F. van; Schouten, B.; Wekker, R. (2005) - "*The Statistics Netherland's Business Cycle Tracer. Methodological aspects; concepts, cycle computation and indicator selection*". Mimeo 2005 -MIC-44. Statistics Netherlands. Division of Macroeconomic statistics and publications.
- [2003] Schleicher, C. (2003) - "*Essays on the decomposition of economic variables*". Tesis de Doctorado presentada en University of British Columbia.
- [2005] Theoduloz, T. (2005)- "*El producto potencial de la economía uruguaya: 1978-2003*". XX JORNADAS ANUALES DE ECONOMÍA
- [2003] Vinod, H. (2003) "*Constructive Ensembles for Time Series in Econometrics and Finance*".

A. Marco Teórico

En esta sección se presentan las herramientas que se utilizan para la estimación del ciclo y la construcción de intervalos de confianza. Primero se describen brevemente las técnicas de remuestreo tanto en el contexto tradicional de datos iid como en el caso que los datos muestren dependencia temporal, y para terminar se describe el filtro diseñado por Christiano y Fitzgerald que es utilizado para estimar el ciclo del PIB uruguayo.

A.1. Técnicas de Remuestreo General

Las técnicas de remuestreo surgen con los trabajos de Efron en 1979 quién define las bases conceptuales que sustentan las técnicas estadísticas basadas en simulaciones. Estas técnicas pueden utilizarse para obtener estimaciones de sesgo, varianza, intervalos de confianza y otras propiedades de los estadísticos en situaciones complejas. El contexto en que se desarrolla este tipo de aplicaciones puede presentarse como sigue:

- Y_1, Y_2, \dots, Y_n iid con $Y_1 \sim F$
- θ es el parámetro de interés
- T es un estadístico utilizado para estimar θ

La esencia del "bootstrapping" es la idea que, en ausencia de cualquier otro conocimiento sobre la distribución de una población, la distribución de valores encontrada en una muestra aleatoria de tamaño n de la población es la mejor información para aproximar su distribución de probabilidades.

En esta situación el problema consiste en estudiar las propiedades de la distribución del estadístico T , para lo cual hay dos grandes caminos. En el primero se cuenta con un modelo paramétrico para la función de distribución F , es decir que existe ϕ tal que $F = F(\phi, y)$. En este caso el parámetro de interés $\theta = h(\phi)$. A partir de un estimador de ϕ , se obtiene una estimación para la distribución de los datos, $\hat{F} = F(\hat{\phi}, y)$. En el caso que no se disponga de un modelo para la distribución F , esta puede ser estimada con la distribución empírica de los datos. Esto es, $\hat{F} = F_n(y) = \frac{1}{n} \sum I_{y_i \leq y}$. Esta es una aproximación no paramétrica del problema.

El estadístico T es una función de los datos y por lo tanto sus propiedades estocásticas dependen de F . Así por ejemplo el sesgo del estadístico se expresa como $\beta = b(F) = E(T/F) - \theta$. Esta cantidad debe ser

estimada ya que tanto θ como F son desconocidos, lo que se logra sustituyendo θ por $T(y_1, \dots, y_n) = t$ y F por \hat{F} . Se debe tener en cuenta que $b(F)$ puede ser cualquier otra característica de la distribución de T .

Entonces se quiere calcular $B = b(\hat{F}) = E(T/\hat{F}) - t$ como estimador de β . Se puede notar que el estimador del sesgo tiene la misma forma funcional pero evaluada sobre \hat{F} en lugar de la verdadera distribución.

En muchas situaciones el cálculo de $b(\hat{F})$ puede ser muy complejo, ya sea porque la función $b(\cdot)$ involucra momentos de mayor orden, cuando el tamaño de la muestra es pequeño o cuando está basado en la distribución empírica. Es aquí donde aparece la utilidad de las técnicas de remuestreo, que se basan en construir una aproximación de \hat{F} que simplifica el cálculo de $b(\cdot)$.

Las aproximaciones se obtienen a partir de simular el conjunto de datos, una simulación de los datos consiste en $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$ donde cada $Y_i^* \sim \hat{F}$ y son independientes entre si. Entonces se simulan R conjuntos de datos distintos y en cada uno de ellos se calcula $T^* = T(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ obteniéndose una secuencia T_1^*, \dots, T_R^* que provienen de la distribución de T/\hat{F} .

De esta manera, continuando con el ejemplo del sesgo de T , se puede calcular la estimación de $B = b(\hat{F})$ con B_R , donde

$$B_R = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R T_r^* - t \quad (3)$$

Si se quisiera estimar la varianza de T , sería:

$$V_R = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (T_r^* - \bar{T}^*)^2 \quad (4)$$

La idea básica del bootstrap no paramétrico es que en ausencia de otra información sobre la población, la distribución de una muestra aleatoria es la mejor guía para determinar la distribución de la población; por lo tanto, remuestrear la muestra con reemplazamiento nos aproxima a lo que sucedería si se remuestrea la población.

A.2. Remuestreo en Series de Tiempo

En el caso del remuestro con datos independientes e idénticamente distribuidos recién comentado, la construcción de las réplicas es relativamente sencilla. Es decir, el objetivo es obtener $Y_i^* \sim \hat{F}$, para lo que cada dato observado debe tener igual probabilidad de ser seleccionado por lo que esto se logra con una MAS (Muestra Aleatoria Simple) con reposición de los datos.

En cambio si los datos tienen una estructura de dependencia, el esquema anterior no puede ser aplicado. A continuación se describen algunos métodos para obtener réplicas en el caso de datos con dependencia temporal.

Remuestreo Basado en Modelos

Esta metodología consiste en ajustar un modelo ARIMA $Y_t = \psi(L)\epsilon_t$ a los datos, obtener los residuos del modelo ajustado $\hat{\epsilon}_t = (\hat{\psi}(L))^{-1}Y_t$ y con ellos generar una nueva serie. Para ello se sortea una muestra aleatoria simple con reposición de $\hat{\epsilon}_t$, y a partir de esa muestra se obtiene una réplica de la serie original. Esta es la forma más directa de obtener un conjunto de variables independientes e idénticamente distribuidas en donde se puede aplicar la técnica tradicional de bootstrap. De forma esquemática es posible representar este método de la siguiente manera:

1. A partir de $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ se estima un modelo ARIMA y se obtiene $\hat{\psi}(L)$ y $\hat{\epsilon}_t$
2. Se realiza una muestra aleatoria simple con reposición de los residuos del modelo estimado, obteniéndose $\{e_1^b, e_2^b, \dots, e_T^b\}$ que es un conjunto del mismo tamaño de la serie original donde pueden existir valores repetidos.
3. Se construyen réplicas del modelo ajustado calculando $y_t^b = \hat{\psi}(L)e_t^b$.
4. Para $b \in 1, 2, \dots, B$ se repiten los pasos 2 y 3.

La principal ventaja de este método es que se le puede aplicar a cualquier serie que sea modelable con un ARIMA. Esta metodología arroja buenos resultados cuando el proceso generador de los datos es el modelo ARIMA utilizado para construir las réplicas. Los problemas de este método surgen cuando el modelo ARIMA no es correcto ó cuando las réplicas del modelo no son estacionarias.

Remuestreo Basado en Bloques

El segundo método de remuestreo construye bloques de la serie original de tal forma que sean independientes, y luego el remuestreo es aplicado sobre los bloques. Para la construcción de los bloques no es necesaria la estimación de un modelo, por lo que es un método no paramétrico.

Los bloques se pueden construir solapados o no solapados. A partir de $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ los bloques no solapados de tamaño h son

$$z_1 = (y_1, y_2, \dots, y_h), \quad z_2 = (y_{h+1}, y_{h+2}, \dots, y_{2h}), \quad z_{T/h} = (y_{T-h}, y_{T-h+1}, \dots, y_T)$$

es decir la serie original se particiona en T/h bloques de observaciones consecutivas que no se solapan entre si. Por otro lado los bloques solapados son

$$z_1 = (y_1, y_2, \dots, y_h), \quad z_2 = (y_2, y_3, \dots, y_{h+1}), \quad z_{T-h+1} = (y_{T-h}, y_{T-h+1}, \dots, y_T)$$

En este caso se obtienen $T-h+1$ bloques, cada bloque de tamaño h repite $h-1$ observaciones del bloque anterior.

Una vez que los bloques son construidos se sortea una muestra simple con reposición de bloques de tamaño T/h , con la que se construye una réplica de la serie original concatenando los bloques sorteados. Esto se repite B veces. Si la serie es estacionaria la dependencia entre observaciones disminuye a medida que la distancia entre ellas aumenta, la idea de estos métodos es que la dependencia de la serie esté contenida al interior de los bloques para tratarlos como intercambiables.

Esto motiva que el tamaño de los bloques sea suficientemente grande como para captar la dependencia de la serie. Por otro lado como el objetivo es tener una gran cantidad de estimaciones distintas del parámetro de interés (en este trabajo la señal cíclica), es necesario contar con muchas réplicas distintas de la serie original. Pero la cantidad de réplicas a su vez está limitada por el número de bloques, esto apunta a que el tamaño de los bloques sea pequeño para poder tener muchas réplicas distintas. Los dos efectos antes mencionados deben ser tenidos en cuenta para la definición del tamaño del bloque.

Existen muchas variantes para la construcción de los bloques, entre ellas la combinación del método basado en réplicas de modelos y bootstrap en bloques. Dicho método consiste en obtener los residuos de un modelo ARIMA y luego construir las réplicas de los residuos con bloques. Otra forma es que el tamaño de cada bloque sea aleatorio, esto permite obtener réplicas que son estacionarias cosa que no sucede con el esquema de bloques simples.

Remuestreo Basado en Máxima Entropía

Esta técnica es presentada en H.D Vinod [2003], la misma se basa en considerar el criterio de máxima entropía para la construcción de las réplicas bootstrap. Este método es útil ya que no se necesita definir un modelo, además de no ser necesario contar con una serie estacionaria para su implementación.

La entropía es definida como la esperanza de la información de Shannon, como sigue:

$$H = E(-\log f(x))$$

Se imponen las condiciones para que $f(x)$ sea una función de densidad y que además maximice H .

Primero se ordenan los datos y se define $z_t = 0,5(x_{(t)} + x_{(t+1)}) \forall t = 1, 2, \dots, T-1$ que son los puntos intermedios entre dos estadísticos de orden sucesivos. Posteriormente se construyen intervalos de forma tal que cada intervalo contenga a un único estadístico de orden. En este sentido el primer y último intervalo son $I_1 = (-\infty, z_1)$ y $I_T = (z_{T-1}, \infty)$, mientras que los intervalos intermedios se definen como $I_k = (z_{k-1}, z_k) \forall k = 1, 2, \dots, T-1$.

Los intervalos antes mencionados son importantes, ya que son utilizados para construir la densidad de entropía empírica. En particular esta función es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{m_1} \exp\left(\frac{x - z_1}{m_1}\right) & x \in I_1 \\ f(x) &= \frac{1}{m_T} \exp\left(\frac{z_{T-1} - x}{m_T}\right) & x \in I_T \\ f(x) &= \frac{1}{z_k - z_{k-1}} & x \in I_k \end{aligned} \tag{5}$$

donde $m_1 = 0,75x_{(1)} + 0,25x_{(2)}$, $m_T = 0,75x_{(T)} + 0,25x_{(T-1)}$ y $m_k = 0,25x_{(k-1)} + 0,50x_{(k)} + 0,25x_{(k+1)}$. Con esto se puede calcular la distribución de máxima entropía a partir de los datos, en el artículo de Vinod se cita a Kagan (1973) y Theil-Laitinen(1980) como antecedentes para el cálculo de estas funciones. Luego se sortean valores provenientes de la distribución de máxima entropía para construir muestras de la muestra ordenada, y finalmente se reordena cada réplica para recuperar el orden original de los datos.

Con el objetivo de evaluar la performance del método basado en máxima entropía propuesto por Vinod en una aplicación concreta, se replicó un ejemplo contenido en "Time Series Analysis..." Cryer, Sik-Chan (2008). En este libro, los autores ejemplifican las técnicas de bootstrap aplicadas a modelos ARMA mediante el cálculo de intervalos de confianza para los coeficientes estimados de un AR(3) utilizando los datos *hare*.

El cuadro 7 es idéntico a la tabla 7.10 de [?] a la que se le agrega una fila que corresponde a el intervalo de confianza con réplicas basadas en máxima entropía. Las demás filas del cuadro representan los intervalos para los coeficientes del modelo usando réplicas basadas en modelos con distintas variantes (ver [?]).

Los resultados del cuadro 7 muestran que los intervalos de confianza obtenidos a partir de las réplicas basadas en máxima entropía son similares al resto. En alguno de los caso podría presentar menor amplitud que los intervalos basados en modelos y esto puede indicar que el método propuesto por Vinod subestima la variabilidad de la serie. Sumado a los comentarios contenidos en [?] hace que los resultados obtenidos con este método deben ser tomados con cuidado.

Method	ar1	ar2	ar3	intercept	noise.var
I	(0.593, 1.269)	(-0.655, 0.237)	(-0.666, -0.018)	(5.115, 6.394)	(0.551, 1.546)
II	(0.612, 1.296)	(-0.702, 0.243)	(-0.669, -0.026)	(5.004, 6.324)	(0.510, 1.510)
III	(0.699, 1.369)	(-0.746, 0.195)	(-0.666, -0.021)	(5.056, 6.379)	(0.499, 1.515)
IV	(0.674, 1.389)	(-0.769, 0.194)	(-0.665, -0.002)	(4.995, 6.312)	(0.477, 1.530)
Entropía	(0.814, 1.290)	(-0.661, 0.087)	(-0.573, -0.109)	(4.849, 6.552)	(0.758, 1.732)
Theoretical	(0.684, 1.42)	(-0.806, 0.347)	(-0.768, -0.0178)	(5.032, 6.353)	(0.536, 1.597)

Cuadro 7: Intervalos para AR(3) con los datos hare